

ΘΕΩΡΙΑ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΚΑΤΩ ΑΠΟ
ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΑΠΟΣΤΡΟΦΗΣ ΣΤΗΝ
ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ
ΘΕΩΡΙΑ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ
ΚΑΙ ΣΤΗ ΔΙΑΧΕΙΡΗΣΗ
ΟΙΚΟΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΒΑΡΔΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2006

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	5
2	Ευσταθής έλεγχος στη θεωρία επιλογής χαρτοφυλακίου	13
3	Ευσταθείς κανόνες επιλογής χαρτοφυλακίου	17
3.1	Το μοντέλο μας	17
3.2	Ευσταθείς κανόνες κατανομής χαρτοφυλακίου με μία αξία που εμπεριέχει αβεβαιότητα	21
3.2.1	Μία <i>CRRA</i> συνάρτηση χρησιμότητας	24
4	Ευσταθείς κανόνες κατανομής χαρτοφυλακίου με δύο αξίες που εμπεριέχουν αβεβαιότητα	26
4.1	Ίδια επίπεδα αβεβαιότητας μεταξύ των αξιών	26
4.1.1	Αριθμητικά αποτελέσματα για <i>CRRA</i> συνάρτηση χρησιμότη- τας	31
4.2	Διαφορετικά επίπεδα αβεβαιότητας μεταξύ των αξιών	33
4.2.1	Η ειδική περίπτωση δύο αξιών που εμπεριέχουν αβεβαιότη- τα	34
5	Στοχαστικό σύνολο επενδυτικών επιλογών	36
5.1	Ίδια επίπεδα αβεβαιότητας μεταξύ των αξιών.	36
5.1.1	Ευσταθείς κανόνες κατανομής χαρτοφυλακίου με μία αξία που χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα.	36
5.1.2	Η περίπτωση στοχαστικής μέσης απόδοσης και τυπικής απόκλισης	40
5.1.3	Δύο αξίες που εμπεριέχουν αβεβαιότητα	41
5.2	Ευσταθείς κανόνες κατανομής χαρτοφυλακίου. Διαφορετικά επίπεδα αβεβαιότητας	48
5.2.1	Μία αξία που χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα, με στο- χαστική μέση τιμή ή τυπική απόκλιση	48
5.2.2	Στοχαστική μέση αναμενόμενη τιμή και τυπική απόκλιση	50
5.2.3	Δύο αξίες που εμπεριέχουν αβεβαιότητα	51
5.3	Αβεβαιότητα ως προς μία αξία. Το "home bias puzzle"	53
6	Αβεβαιότητα και διαχείριση οικοσυστημάτων	59
7	Κανόνες διατήρησης της βιοποικιλότητας κάτω από αβεβαιότη- τα	62
7.1	Διατήρηση της βιοποικιλότητας	62
7.1.1	Ένα ντετερμινιστικό μοντέλο με αλληλεπιδράσεις	62
7.1.2	Αβεβαιότητα και διαχείριση βιοποικιλότητας	63
7.1.3	Η γενική περίπτωση n ειδών	66
7.2	Ασφαλείς κανόνες κάτω από αβεβαιότητα κατά <i>Knigh</i> t	68

8 Διαχείριση βιοποικιλότητας: Αβεβαιότητα και πρόληψη	72
8.1 Αποστροφή στην αβεβαιότητα και διαχείριση βιοποικιλότητας. Ένα στατικό μοντέλο	72
8.2 Διαχείριση βιοποικιλότητας. Ένα δυναμικό μοντέλο	75
8.2.1 Ένα ιδιωτικά βέλτιστο πρόβλημα διαχείρισης βιοποικιλότητας	75
8.2.2 Ένα κοινωνικά βέλτιστο πρόβλημα διαχείρισης βιοποικιλότητας	81
8.3 Ενδογενοποίηση του ε	84
8.3.1 Η περίπτωση μεγάλων διαταραχών και ακραίων φαινομένων	85
9 Εφαρμογή των παραπάνω στο διαδίκτυο	88
9.1 Συναλλαγές μέσω διαδικτύου	88
9.2 Επιλογή μετοχών νέων τεχνολογιών	89
10 Συμπεράσματα	91
11 Παράρτημα	97

Η υποστήριξη της παρούσας διδακτορικής διατριβής πραγματοποιήθηκε στο Ρέθυμνο στις 12 Απριλίου 2006 στα πλαίσια του διδακτορικού προγράμματος σπουδών του τμήματος Οικονομικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Κρήτης.

Υπεύθυνος της διδακτορικής διατριβής ήταν ο Α. Ξεπαπαδέας. Στην τριμελή επιτροπή της εργασίας συμμετείχαν επίσης, οι Π. Καλαϊτζιδάκης και Γ. Κοσιώρης. Την επταμελή επιτροπή συμπλήρωσαν, οι Δ. Γεωργούτσος, Γ. Κουρέτας, Ε. Πετράκης και Ε. Σαρτζετάκης.

Η διδακτορική διατριβή χρηματοδοτήθηκε από το ΠΕΝΕΔ Μίνως, της Γ.Γ.Ε.Τ. με φορέα χρήστη το Επιμελητήριο Ηρακλείου, τους οποίους και ευχαριστούμε θερμά. Ευχαριστούμε, επίσης και τον Ε.Λ.Κ.Ε. του Πανεπιστημίου Κρήτης για τη συμβολή του στην ομαλή διεκπεραίωση του προγράμματος.

Ευχαριστώ θερμά τον κ. Αναστάσιο Ξεπαπαδέα, για την καθοδήγηση και τη βοήθεια που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διδακτορικής διατριβής. Ευχαριστώ, επίσης, όλα τα μέλη της επταμελούς επιτροπής για τη βοήθεια που μας προσέφεραν. Ευχαριστώ τη γραμματεία του τμήματος Οικονομικών Επιστημών και ιδιαίτερα την Ι. Γιωτοπούλου για τη συμβολή της στην ολοκλήρωση της διδακτορικής διατριβής.

Τέλος, ευχαριστώ θερμά την οικογένεια μου και όλους όσους με στήριξαν τα τελευταία χρόνια και με βοήθησαν να φτάσω ως εδώ.

Περίληψη

Η μελέτη της λήψης αποφάσεων κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας κατά *Knight*, την οποία τα άτομα αποστρέφονται, αποτελεί το θέμα της παρούσας διδακτορικής διατριβής. Σαν πεδία εφαρμογών έχουμε επιλέξει τη διαχείριση χαρτοφυλακίου και συγκεκριμένα τη μελέτη του προβλήματος βέλτιστης επιλογής χαρτοφυλακίου του *Merton*, καθώς επίσης και τη διαχείριση οικοσυστημάτων, ως προς τη διατήρηση και διαχείριση της βιοποικιλότητας στη φύση. Επιπλέον δείχνουμε ότι τα αποτελέσματα αυτά μπορούν να εφαρμοστούν και σε άλλους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας, όπως το διαδίκτυο.

Αναφορικά ως προς την πρώτη εφαρμογή διατυπώνουμε το πρόβλημα της βέλτιστης επιλογής χαρτοφυλακίου του *Merton*, σαν ένα πρόβλημα ευσταθούς ελέγχου (*robust control*), μελετάμε αυτό και αποδεικνύουμε συνθήκες αναφορικά με τις παραμέτρους του προβλήματος και τη δομή της αβεβαιότητας, η ικανοποίηση των οποίων επάγει επιθετικότερη συμπεριφορά σε σχέση με το κλασσικό οικονομικό περιβάλλον.

Ός προς τη διαχείριση οικοσυστημάτων, αναπτύσσουμε δύο μοντέλα, όπου η διαφορά στα αποτελέσματα ανάμεσα στην περίπτωση αποτροφής κίνδυνου και αποτροφής στην αβεβαιότητα ερμηνεύεται σαν ένα μέτρο της αρχής της προφύλαξης (*precautionary principle*), στη διαχείριση βιοποικιλότητας. Ειδικότερα στο πρώτο, όπου η αβεβαιότητα έχει διατυπωθεί βάσει της *k-ignorance* μεθοδολογίας, αποδεικνύουμε ασφαλείς κανόνες για τη διατήρηση της βιοποικιλότητας στη φύση. Στο επόμενο κάνοντας χρήση της ϵ – *contamination* προσέγγισης, βλέπουμε πως η αβεβαιότητα επηρεάζει τα βέλτιστα επίπεδα βιομαζών στο οικοσύστημα.

Το συμπέρασμα από τα αποτελέσματα των εφαρμογών είναι ότι η ύπαρξη αβεβαιότητας και ο τρόπος με τον οποίο αυτή δομείται και αντιμετωπίζεται, δίνει διαφορετικά αποτελέσματα και προτείνει διαφορετικές αποφάσεις και πολιτικές σε σχέση με την κλασσική θεωρία. Τα νέα αποτελέσματα είναι τις περισσότερες φορές σε συνέπεια με τα πραγματικά γεγονότα και φαινόμενα στη φύση και οδηγούν στην εξήγηση ορισμένων παραδόξων που είναι δύσκολο να εξηγήσει η κλασσική θεωρία.

1 Εισαγωγή

Σε πολλά πεδία της οικονομικής επιστήμης που εξετάζεται η λήψη αποφάσεων κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας, όπως για παράδειγμα η θεωρία αποτίμησης των αξιών που έχει αναπτυχθεί τις τελευταίες δεκαετίες, συνήθως υιοθετούμε ισχυρές απαιτήσεις ως προς τις προτιμήσεις των καταναλωτών-επενδυτών. Ειδικότερα βάσει της «*rational expectation hypothesis*», όπως είναι γνωστή στη βιβλιογραφία, υπάρχει ένα αντικειμενικό μέτρο πιθανότητας, το οποίο περιγράφει την πορεία εξέλιξης της τιμής των διάφορων αξιών, και αυτός ο οποίος καλείται να λάβει μία απόφαση, γνωρίζει επακριβώς. Γενικότερα ακόμα και στην περίπτωση όπου η ύπαρξη ενός τέτοιου μέτρου πιθανότητας δεν υποτίθεται, τα πιστεύω κάθε ατόμου που λαμβάνει αποφάσεις, αναφορικά με τις μελλοντικές πυκνότητες πιθανότητας απεικονίζονται από ένα υποκειμενικό μέτρο πιθανότητας σε αντιστοιχία με το *Bayesian* μοντέλο της θεωρίας αποφάσεων και ειδικότερα των αξιωμάτων που είχαν τεθεί από τον *Savage* [63]. Σαν αποτέλεσμα αυτού ήταν να μην επιτρέπεται καμία διάκριση ανάμεσα στον όρο «*risk*» κίνδυνος, ο οποίος αναφέρεται στην περίπτωση εκείνη όπου οι πιθανότητες πραγματοποίησης των διάφορων ενδεχομένων είναι γνωστές και στον όρο «*uncertainty*» αβεβαιότητα, όπου αναφέρεται στην περίπτωση εκείνη που ο χώρος των ενδεχομένων ενός πειράματος είτε δεν είναι γνωστός είτε, όταν η υπάρχουσα πληροφορία είναι ανεπαρκής, ώστε αυτός να μπορεί να απεικονιστεί με τη βοήθεια κάποιου μέτρου πιθανότητας. Ο *Knight*, [46] ήταν εκείνος ο οποίος πρώτος έδωσε ιδιαίτερη έμφαση στη διάκριση των δύο παραπάνω όρων και υποστήριξε ότι η αβεβαιότητα, είναι εκείνη η οποία πραγματικά αντικατοπτρίζει την πλειονότητα των οικονομικών εφαρμογών.

Ο *Elsberg* [22], ήταν από τους πρώτους που αντιτάχθηκε στα αξιώματα του *Savage*. Ειδικότερα αυτός πρότεινε το παρακάτω πείραμα: Έστω ότι έχουμε δύο κάλπες και καλούμαστε να αξιολογήσουμε βάσει προτιμήσεων και να ιεραρχήσουμε τέσσερα ενδεχόμενα. Συγκεκριμένα η πρώτη κάλπη έστω ότι περιέχει 50 μαύρες και 50 κόκκινες σφαίρες, ενώ για τη δεύτερη κάλπη δεν διαθέτουμε καμία πληροφορία αναφορικά με τις μπάλες κάθε χρώματος. Επιλέγουμε μία μπάλα από κάθε κάλπη. Έστω AB το ενδεχόμενο ότι η μπάλα από το πρώτο δοχείο είναι μαύρη, ενώ AR ότι αυτή είναι κόκκινη. Όμοια ορίζουμε τα BB , BR . Αυτός ο οποίος στοιχηματίζει στο ενδεχόμενο εκείνο το οποίο πραγματοποιείται μετά το πείραμα τύχης έστω ότι κερδίζει 100 μονάδες. Εμπειρικά ο *Elsberg* είδε ότι $AB \simeq AR > BB \simeq BR$. Είναι αρκετά εύκολο να δούμε ότι δεν υπάρχει μέτρο πιθανότητας το οποίο υποστηρίζει την παραπάνω κατανομή βάσει του κριτηρίου της μεγιστοποίησης της αναμενόμενης τιμής της ωφελιμότητας, το οποίο εφαρμόζεται στην περίπτωση ύπαρξης μοναδικού μέτρου πιθανότητας. Μία εξήγηση του παραπάνω βάσει των *Gilboa Schmeidler* [31], είναι η παρακάτω: Το άτομο που λαμβάνει αποφάσεις δεν έχει αρκετή πληροφορία στην περίπτωση της δεύτερης κάλπης ώστε να είναι σε θέση να χρησιμοποιήσει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας. Επομένως, θεωρεί ένα σύνολο μέτρων πιθανότητας ως πιθανά. Καθώς αυτό αποστρέφεται την

αβεβαιότητα θεωρεί την ελάχιστη αναμενόμενη ωφελιμότητα η οποία επάγεται λαμβάνοντας υπόψη το σύνολο των πιθανών μέτρων πιθανότητας. Στην περίπτωση της πρώτης κάλπης η τιμή για τα $AB, AR = 50$, ενώ για τα $BB, BR = 0$.

Οι ιδέες αυτές δεν ήταν τότε εντελώς νέες. Ο *Hurwicz* [44], είχε δείξει ένα παράδειγμα στατιστικής ανάλυσης όπου ο στατιστικός δεν είναι σε θέση να έχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας, αλλά ήταν σε θέση να εφαρμόσει τον κανόνα του *Wald* [76] αναφορικά με όλα τα μέτρα πιθανότητας. Ως προς αυτό ο *Smith* [68], πρότεινε ένα σύνολο μέτρων πιθανότητας για να αντιμετωπίσει αυτές τις καταστάσεις. Στις εργασίες οι οποίες αφορούν στο πρόβλημα της μη ύπαρξης ενός μοναδικού πιθανοθεωρητικού μέτρου, που σχετίζονται με το ολοκλήρωμα *Choquet* [17] συμπεριλαμβάνεται και εκείνη των *Huber* και *Strassen* [43], οι οποίοι χρησιμοποιούν το ολοκλήρωμα *Choquet* για να ελέγξουν υποθέσεις οι οποίες αφορούσαν στην επιλογή ανάμεσα σε δύο ξένα σύνολα μέτρων. Ο *Schmeidler* [64], [65], [66], παρέχει την αξιωματική θεμελίωση των προτιμήσεων που επάγονται από τη χρήση του ολοκληρώματος *Choquet* της χρησιμότητας αναφορικά με ένα σύνολο μη προσθετικών μέτρων πιθανότητας, χρησιμοποιώντας μία μεθοδολογία που περιελάμβανε τις ίδιες λοταρίες όπως και οι *Anscombe* *Aumann* [4]. Πρόσφατα, από τους *Casadesus-Massanel*, *Kilbanoff* και *Ozdenoren* [14], έχει δοθεί η αξιωματική θεμελίωση για δράσεις σαν αυτές του *Savage*.

Στην εργασία των *Gilboa* *Schmeidler* [31], παρέχεται η αξιωματική θεμελίωση του *maxmin* κανόνα ως προς την αναμενόμενη ωφελιμότητα, για τη λήψη αποφάσεων. Η παραπάνω θεωρία είναι γνωστή σαν *maxmin* εξαιτίας του ότι το άτομο που λαμβάνει αποφάσεις αποτιμά τις λοταρίες υπολογίζοντας την αναμενόμενη ωφελιμότητα για όλα τα δυνατά μέτρα πιθανότητας και κάνει έπειτα μία σύγκριση σχετικά με την ελάχιστη τιμή του δείκτη αυτού. Η κύρια διάφορα του μοντέλου που προτείνεται από τους *Gilboa* *Schmeidler* και αυτών των *Anscombe* και *Aumann* [4], *Schmeidler* [65], έγκειται στη διατύπωση του αξιώματος ανεξαρτησίας, όσο και στην εισαγωγή του αξιώματος της αποστροφής στην αβεβαιότητα (*Uncertainty Aversion*). Το κύριο αποτέλεσμα της δουλειάς αυτής, ήταν μία επέκταση του *neobaysian* παραδείγματος που οδηγεί σε ένα σύνολο μέτρων πιθανότητας αντί ενός μοναδικού μέτρου. Η παραπάνω εργασία μπορεί να θεωρηθεί ως η αξιωματική θεμελίωση των κριτηρίων του *Wald* [76] και σίγουρα διαφέρει από άλλες προσεγγίσεις όπου ενδεικτικά αναφέρουμε αυτές των: *Lindley*, *Tversky* και *Brown* [47], *Vandennan* και *Meeden* [75], *Agnew* [1], *Genest* και *Schervish* [30] και *Bewley* [7].

Στη συνέχεια ακολουθεί η παρουσίαση του κυρίου αποτελέσματος της εργασίας των *Gilboa* και *Schmeidler*: Ειδικότερα αυτοί ορίζουν τις πιθανές καταστάσεις του κόσμου με Ω και με Σ μία άλγεβρα ενός συνόλου S . Το σύνολο των υποσύνολων συμβολίζεται με X , όπου $Y = \Delta(X)$ το σύνολο των κατανομών πιθανότητας με πεπερασμένο φορέα στο X , με L_0 το σύνολο όλων των Σ -μετρήσιμων πεπερασμένων κλιμακωτών συναρτήσεων από το S στο Y και με L_c τις σταθερές συναρτήσεις του L_0 . Τέλος, με L συμβολίζουν ένα

κυρτό υποσύνολο του Y^s που επάγει το L_c . Οπότε L είναι το σύνολο όλων των Σ -μετρήσιμων κλιμακωτών πεπερασμένων συναρτήσεων από το Ω στο Y .

Στο *neobayesian* μοντέλο τα στοιχεία του X είναι ντετερμινιστικά, τα ενδεχόμενα στοιχεία του Y είναι τυχαία ενδεχόμενα ή (*roulette*) λοταρίες και τα στοιχεία του L είναι ενέργειες ή (*horse*) λοταρίες. Αυτά του S είναι καταστάσεις της φύσης και του Σ γεγονότα. Ενδιαφέρονται, λοιπόν, και εδώ να συγκρίνουν λοταρίες $f \in L$, όπου πάνω από τις οποίες ο λήπτης αποφάσεων έχει μία σχέση προτίμησης \succeq . Τα αξιώματα που διέπουν τη σχέση προτίμησης δίνονται στη συνέχεια:

A1: Ασθενής Διάταξη, (*Weak Order*).

- α. Για $f, g \in L$: $f \succeq g$ ή $g \succeq f$
 β. Για $f, g, h \in L$: $\text{Αν } f \succeq g \text{ και } g \succeq h \Rightarrow f \succeq h$.

A2: Βεβαιότητα-Ανεξαρτησία, (*Certainty Independence*).

- Για $f, g \in L, h \in L_c$ και για κάθε $\alpha \in (0, 1)$:
 $f \succ g \Leftrightarrow \alpha f + (1 - \alpha)h \succ \alpha g + (1 - \alpha)h$

A3: Συνέχεια, (*Continuity*).

- Για $f, g \in L, h \in L$ $\text{Αν } f \succ g, g \succ h$ τότε υπάρχουν $\alpha, \beta \in (0, 1)$: $\alpha f + (1 - \alpha)h > g$ και $g \succ \beta f + (1 - \beta)h$

A4: Μονοτονικότητα, (*Monotonicity*).

- Για $f, g \in L$: $\text{Αν } f(s) \succeq g(s)$ στο $S \Rightarrow f \succeq g$

A5: Αποστροφή στην αβεβαιότητα, (*Uncertainty Aversion*).

- Για $f, g \in L$ και $\alpha \in (0, 1)$: $f \simeq g \Rightarrow \alpha f + (1 - \alpha)g \succeq f$

A6: Μη-εκφυλισμός, (*Non - degeneracy*).

- Δεν ισχύει για όλα τα $f, g \in L, f \succeq g$

Όλα τα αξιώματα εκτός από τα A2, A5 είναι συνηθισμένα. Το κανονικό αξίωμα ανεξαρτησίας που αντιστοιχεί στο A2 είναι ισχυρότερο από αυτό που παρουσιάζεται εδώ, καθώς επιτρέπει κάθε ενέργεια στο L και όχι στο περιορισμένο L_c , που θεωρείται εδώ και αντιστοιχεί σε σταθερές ενέργειες. Αυτό εδώ φαίνεται να είναι πιο εύχρηστο: Το άτομο που λαμβάνει αποφάσεις, το οποίο προτιμάει το f από το g είναι δυνατόν να φαντάζεται την μίξη f και του g με ένα σταθερό h και όχι ένα αυθαίρετο που μπορεί να του αντιστρέψει τις προτιμήσεις. Ένα διαισθητικό επιχείρημα ενάντια στο συνηθισμένο επιχείρημα ανεξαρτησίας είναι ότι αγνοεί το φαινόμενο της αντιστάθμισης κάτι το οποίο δεν συμβαίνει εδώ λόγω και της συμπληρωματικής δράσης του A5, εκείνου δηλαδή της αποστροφής στην αβεβαιότητα,

Ακολουθεί η παρουσίαση του κύριου θεωρήματος, όπου για το πεπερασμένο προσθετικά σύνολο συναρτήσεων στο Σ χρησιμοποιείται η ασθενής τοπολογία

(*) όπως στους *Dunford* και *Schwartz* [20]:

Θεώρημα 1.0.1 Έστω \succeq μία δυαδική σχέση στο L_0 . Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1. $H \succeq$ ικανοποιεί τις υποθέσεις A1-A5 για $L = L_0$
2. Υπάρχει μία συνάρτηση $u : Y \rightarrow R$ και ένα μη κενό, κυρτό και κλειστό σύνολο C από πεπερασμένους προσθετικά μέτρα πιθανότητας στο Σ τέτοια ώστε:

$$(*) \quad f \succeq g \Leftrightarrow \min_{P \in C} \int u \circ f dP \succeq \min_{P \in C} \int u \circ g dP \quad (f, g \in L_0)$$

- (α) Η συνάρτηση u στο (2) είναι μοναδική ως προς θετικούς γραμμικούς μετασχηματισμούς
- (β) Το σύνολο C στο (2) είναι μοναδικό \Leftrightarrow αν η υπόθεση A6 προστεθεί στο (1).

Η παραπάνω εργασία αποτέλεσε τη βάση για αρκετές επόμενες, με εφαρμογή σε ποικίλους τομείς της οικονομικής επιστήμης, όπου μεταξύ αυτών συγκαταλέγεται και η παρούσα διδακτορική διατριβή. Αναλυτικότερα μεταξύ των σημαντικότερων είναι αυτή των *Epstein* και *Wang* [25], οι οποίοι γενικεύουν το μοντέλο γενικής ισορροπίας του *Lucas* [51] και αποδεικνύουν δύο βασικά αποτελέσματα, την ύπαρξη ισορροπίας και το χαρακτηρισμό των τιμών ισορροπίας με τη βοήθεια μίας ανισότητας *Euler*, αποτέλεσμα το οποίο αναπαριστά τη γενίκευση της παραπάνω ανισότητας στην περίπτωση ύπαρξης αβεβαιότητας. Η μεθοδολογία, η οποία υιοθετείται στην εφαρμογή αυτή είναι διαχρονική (*intertemporal*) σε αντίθεση με την α -χρονική ή στατική (*atemporal*) προσέγγιση των *Gilboa* *Schmeidler*, η οποία επεκτείνεται, μη αξιωματικά, σε άπειρο χρονικό ορίζοντα. Ειδικότερα εδώ θεωρείται μία όχι τόσο ισχυρή εκδοχή του αξιώματος «*Sure Thing Principle*» του *Savage*, κάτι που είχε ως αποτέλεσμα να αντικατασταθεί το μοναδικό μέτρο πιθανότητας που επάγεται από τα αξιώματα του *Savage*, από ένα σύνολο μέτρων πιθανότητας και να οδηγηθούμε έτσι στα «*Multiple Priors Models*» (δηλαδή μοντέλα με πολλαπλά μέτρα πιθανότητας), όπως είναι γνωστά στη βιβλιογραφία. Χαρακτηριστικότερο εξ αυτών είναι η ϵ -*Contamination* προσέγγιση, όπου ο λήπτης αποφάσεων διατυπώνει την αντικειμενική του συνάρτηση δίνοντας πιθανότητα $(1 - \epsilon)$ σε ένα βασικό μέτρο πιθανότητας και ϵ στο μέγιστο κάτω φράγμα, (*infimum*), που επάγει μία οικογένεια μέτρων πιθανότητας. Άλλη μία ιδιαίτερα χρησιμοποιούμενη προσέγγιση η οποία αποτελεί ειδική περίπτωση των μοντέλων με πολλά μέτρα πιθανότητας, είναι η k - *ignorance* μεθοδολογία η οποία περιορίζει το σύνολο των μοντέλων τα οποία το άτομο που λαμβάνει αποφάσεις θεωρεί κάθε στιγμή.

Ένας από τους πολύ υποσχόμενους τομείς αναφορικά με τη μελέτη ύπαρξης αβεβαιότητας είναι αυτός της βέλτιστης κατανομής ενός χαρτοφυλακίου. Για παράδειγμα μία διαφορετική προσέγγιση σε σχέση με αυτή των *Epstein*

και *Wang*, αποτελεί αυτή των *Dow* και *Verlag* [18], οι οποίοι μελετάνε το στατικό πρόβλημα επιλογής του χαρτοφυλακίου ενός επενδύτη με αναμενόμενη ωφελιμότητα ως προς ένα μη προσθετικό μέτρο πιθανότητας, όπου μαζί με τα ολοκληρώματα *Choquet* αποτελεί μία εναλλακτική του *maxmin* κριτηρίου προσέγγιση στην περίπτωση ύπαρξης αβεβαιότητας. Πολύ κοντά, όμως, σε αυτή των *Epstein* και *Wang* προσέγγιση είναι οι εργασίες της *Liu* [49], [48]. Στην πρώτη σε ένα μοντέλο δύο περιόδων αποδεικνύεται ότι η ύπαρξη αβεβαιότητας μειώνει τη συμμετοχή σε αξίες μη σταθερής απόδοσης, ενώ στην επόμενη εφαρμόζεται η εξίσωση του *Euler* και μελετάται πως τα διαθέσιμα μοιράζονται μεταξύ κατανάλωσης και αξιών. Η γενίκευση σε συνεχή χρόνο της εργασίας των *Epstein* και *Wang*, παρέχεται από τους *Chen* και *Epstein* [16]. Ειδικότερα αυτοί αρχικά εισάγουν την «recursive multiple prior utility» και δίνουν αρκετά παραδείγματα, ενώ στη συνέχεια εισάγουν αβεβαιότητα και την αποστροφή σε αυτή εφαρμόζουν τα αποτελέσματα τους στον τομέα της διαχείρισης χαρτοφυλακίου. Σαν συνέχεια αυτής της εργασίας οι *Epstein* και *Miao* [23], δίνουν το παράδειγμα της εξέλιξης μίας οικονομίας σε συνεχή χρόνο με δύο ετερογενή άτομα που λαμβάνουν αποφάσεις. Το ενδιαφέρον σημείο εδώ, είναι ότι κάποιες από τις αξίες θεωρούνται σαν αξίες οι οποίες εμπεριέχουν αβεβαιότητα κατά *Knight*. Τέλος, αναγνωρίζοντας τα άτομα που λαμβάνουν αποφάσεις ως χώρες, δίνουν μία εφαρμογή που εξηγεί το home bias puzzle, δηλαδή το παράδοξο σύμφωνα με το οποίο οι επενδύτες κάθε χώρας επενδύουν πολύ μεγαλύτερο ποσοστό των διαθέσιμων τους σε αξίες που διαπραγματεύονται στην εγχώρια αγορά παρά σε μία διεθνή. Η αξιωματική θεμελίωση της «multiple priors utility», δηλαδή της χρησιμότητας που έχει διατυπωθεί με πολλαπλά μέτρα πιθανότητας στην παραπάνω εργασία των *Chen* και *Epstein*, παρέχεται από την εργασία των *Epstein* και *Scnheider* [24].

Μία εναλλακτική προσέγγιση στις παραπάνω αποτελεί αυτή της χρήσης μεθόδων ευσταθούς ελέγχου, η οποία μπορούμε να πούμε ότι εμφανίστηκε σε οικονομικές εφαρμογές με την εργασία των *Hansen* και *Sargent* [32]. Σύμφωνα με αυτή την εκδοχή, το άτομο που λαμβάνει αποφάσεις είναι αβέβαιο για το αρχικό του μοντέλο ή μοντέλο αναφοράς από την άποψη ότι υπάρχει ένα μεγάλο σύνολο προσεγγιστικών μοντέλων τα οποία μπορούν επίσης να θεωρηθούν ως πιθανά, δεδομένου ενός αρχικού συνόλου στοιχείων-δεδομένων, τα οποία χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση του αρχικού μας μοντέλου. Αν εμφανιστεί τελικά ένα μοντέλο, το οποίο δεν είναι το μοντέλο αναφοράς, τότε κανόνες πολιτικής, οι οποίες σχεδιάστηκαν με βάση το μοντέλο αναφοράς, δεν είναι οι βέλτιστες και μπορεί να οδηγούν σε μη επιθυμητά αποτελέσματα. Το σύνολο αυτών των πιθανών εναλλακτικών μοντέλων λαμβάνεται διαταράσσοντας κάποιο αρχικό μοντέλο αναφοράς (Benchmark model), όπου όλες αυτές οι πιθανές διαταραχές αντικατοπτρίζουν το σύνολο των πιθανών μέτρων πιθανότητας που ο λήπτης αποφάσεων είναι πρόθυμος να θεωρήσει ή διαφορετικά το πόσο σίγουρος είναι για το αρχικό του μοντέλο αναφοράς. Το πρόβλημα το οποίο σχηματίζεται με τον τρόπο αυτό είναι ένα πρόβλημα ευσταθούς ελέγχου

όπου ο στόχος είναι να λάβουμε ένα κανόνα ή αλλιώς να πάρουμε μία απόφαση, η οποία θα ισχύει για ένα σύνολο προσεγγιστικών μοντέλων κοντά κατά μία έννοια στο μοντέλο αναφοράς. Πρόκειται για μία αρκετά σύγχρονη και πολλά υποσχόμενη προσέγγιση που μας επιτρέπει να ενσωματώσουμε την αποστροφή στην αβεβαιότητα σε κάποιο πρόβλημα που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε.

Βάσει, λοιπόν, της παραπάνω θεωρίας το άτομο που λαμβάνει αποφάσεις εκτιμάει ότι κάποιο αρχικό μέτρο πιθανότητας, έστω P περιγράφει το αρχικό του μοντέλο. Θεωρώντας μία διαταραχή, αυτό αντικαθίσταται από ένα άλλο πιθανό μέτρο πιθανότητας, έστω Q . Η απόσταση μεταξύ αυτών των δύο πιθανοθεωρητικών μέτρων δίνεται από τη σχετική εντροπία, έστω $R(Q//P)$. Δοθέντος, λοιπόν, ενός συνόλου πιθανών κατανομών \mathbf{Q} και ενός μέτρου, σε αυτό το σύνολο, το οποίο εμείς εδώ ονομάσαμε Q , οι *HSTW* [39], παρουσιάζουν δύο κλάσεις προτιμήσεων οι οποίες ορίζονται μέσω προβλημάτων έλεγχου. Η πρώτη εξ αυτών είναι γνωστή ως δεσμευμένες (*constraint*) προτιμήσεις και δίνεται από το παρακάτω πρόβλημα:

$$J^*(\eta) = \sup_C \inf_{Q \in \mathbf{Q}(\eta)} \mathbb{E}_Q \int_0^\infty e^{-\delta t} U(C) dt$$

μ.π.

$$\mathbf{Q}(\eta) = \{Q \in \mathbf{Q} : \mathbf{R}(Q//P) \leq \eta\}$$

όπου ο περιορισμός $\mathbf{R}(Q//P) \leq \eta$, δηλώνει ότι θεωρούμε όλα τα μέτρα πιθανότητας Q , έτσι ώστε η απόστασή τους, ¹ από το αρχικό μέτρο πιθανότητας να είναι μικρότερη από κάποια επιθυμητή προαποφασισμένη σταθερά η . Οι *HSTW* έχουν εισάγει και μία δεύτερη κλάση προβλημάτων έλεγχου που ορίζουν τις *multiplier* προτιμήσεις, δηλαδή προτιμήσεις που ορίζονται με τη βοήθεια πολλαπλασιαστή. Το θετικό σε αυτή την κατηγορία προβλημάτων είναι ότι έχουν μία αναδρομική δομή που επιτρέπει να εφαρμοστούν τα εργαλεία και οι μέθοδοι δυναμικού προγραμματισμού. Επίσης, αυτοί συνδέουν τις δύο κατηγορίες προβλημάτων και επομένως συνδέουν έτσι με τον τρόπο αυτό τις *multiplier* προτιμήσεις με την αξιωματική θεμελίωση του *Uncertainty Aversion*. Το παρακάτω πρόβλημα ορίζει τις προτιμήσεις αυτές, όπου συνδυάζοντας τις εργασίες του *Wang* [77], [78], λαμβάνουμε μία αξιωματικά θεμελιωμένη έκδοση των προτιμήσεων αυτών.

$$J(\theta) = \sup_C \inf_{Q \in \mathbf{Q}(\eta)} \mathbb{E}_Q \int_0^\infty e^{-\delta t} U(C) dt + \theta R(Q//P)$$

μ.π. Στοχαστική διαφορική εξίσωση

Στις δύο παραπάνω προσεγγίσεις τα βαθμωτά η, θ δηλώνουν το σύνολο των εναλλακτικών μοντέλων, τα οποία το άτομο που λαμβάνει αποφάσεις είναι πρόθυμο να θεωρήσει ή διαφορετικά πόσο σίγουρο είναι για το αρχικό του μοντέλο.

¹Την απόσταση αυτή την μετράμε με αυτό το μέτρο εντροπίας που είναι ίσο με το ολοκλήρωμα του λογαρίθμου της *Randon Nikodin* παραγώγου των δύο μέτρων.

Ειδικότερα, το θ μπορεί να θεωρηθεί σαν ο πολλαπλασιαστής *Lagrange* στον περιορισμό εντροπίας $R(Q//P) \leq \eta$. Για κάθε η έχειδειχθεί ότι υπάρχει θ έτσι ώστε τα δύο προβλήματα να έχουν ίδιες λύσεις.

Αναφορικά με την επίλυση αυτών των προβλημάτων αξίζει εδώ να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στο γεγονός ότι οι προτιμήσεις που ορίζονται με τη βοήθεια πολλαπλασιαστή έχουν μία αναδρομική δομή που επιτρέπει να εφαρμοστούν τα εργαλεία και οι μέθοδοι του δυναμικού προγραμματισμού. Ειδικότερα, κάνοντας χρήση των αποτελεσμάτων των Fleming Souganidis [27] αναφορικά με τη λύση στο παραπάνω πολλαπλασιαστικό πρόβλημα λαμβάνουμε ότι η συνάρτηση αξίας του προβλήματος είναι ιξώδης λύση (viscosity solution) μίας εξίσωσης που αναπαριστά ένα στοχαστικό διαφορικό παίγνιο μεταξύ δύο παικτών, και η οποία επιλύεται είτε αναλυτικά είτε αριθμητικά εφαρμόζοντας κατάλληλες τεχνικές ανάλογα με τη φύση του προβλήματος που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε.

Η μακροοικονομία και ιδιαίτερα η νομισματική πολιτική ήταν από τους πρώτους τομείς όπου έγινε εφαρμογή της θεωρίας του ευσταθούς ελέγχου. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε τις εργασίες της ομάδας του Hansen και Sargent: [33], [34], [35], [36], [37], [38]. Ένας άλλος χώρος στον οποίο έχουν εφαρμογή οι παραπάνω ιδέες είναι αυτός της χάραξης περιβαλλοντολογικής πολιτικής και διαχείρισης φυσικών πόρων, όπου η αποστροφή στην αβεβαιότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διατύπωση της αρχής της προφύλαξης, (Precautionary Principle), [12], [62]. Άλλες παρόμοιες εφαρμογές, που αντιμετωπίζουν την ύπαρξη αβεβαιότητας αποτελούν αυτές των: Brainard [8], Onatski και Stock [57], Onatski και Williams [58], Soderstrom [69]. Επίσης οι εργασίες των Brock και Durlauf [9], Brock, Durlauf και West [10], για εφαρμογή στη χάραξη πολιτικής και την αξιολόγηση αυτής.

Η μελέτη της θεωρίας λήψης αποφάσεων κάτω από συνθήκες που χαρακτηρίζονται από αβεβαιότητα, η οποία τα τελευταία χρόνια έχει αρχίσει να κεντρίζει έντονα το ενδιαφέρον της οικονομικής επιστημονικής κοινότητας, αποτελεί το θέμα της παρούσας διδακτορικής διατριβής. Τα πεδία εφαρμογής τα οποία εμείς επιλέγουμε, με σκοπό τη μελέτη της επίδρασης της αβεβαιότητας στη χάραξη πολιτικής είναι αυτό της βέλτιστης επιλογής χαρτοφυλακίου, καθώς επίσης και εκείνο της διαχείρισης οικοσυστημάτων. Στη συνέχεια βλέπουμε πως τα αποτελέσματα αυτά, μπορούν να εφαρμοστούν σε σύγχρονους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας, όπως αυτός του διαδικτύου.

Ειδικότερα η παρούσα διατριβή έχει δομηθεί ως εξής: Στο επόμενο κεφάλαιο γίνεται παρουσίαση του προβλήματος της βέλτιστης επιλογής χαρτοφυλακίου με χρήση μεθόδων ευσταθούς ελέγχου και ανασκόπηση των αποτελεσμάτων τόσο των προηγούμενων προσεγγίσεων όσο και της παρούσας διατριβής. Στα επόμενα τρία κεφάλαια, δηλαδή στα 3,4,5, δίνονται αναλυτικά τα κύρια αποτελέσματα αναφορικά με τη μελέτη του προβλήματος. Στα κεφάλαια 6,7,8, παρουσιάζουμε εφαρμογές που αφορούν στη διαχείριση οικοσυστημάτων. Ειδικότερα, στο κεφάλαιο 6 περιγράφουμε τα προβλήματα που αντιμετωπίζουμε και παραθέτουμε τα κύρια αποτελέσματα, ενώ στα δύο επόμε-

ενα έχουμε την αναλυτική επίλυση αυτών. Έπειτα, στο κεφάλαιο 9 βλέπουμε πως αυτά εφαρμόζονται σε θέματα που σχετίζονται με το διαδίκτυο και στη συνέχεια το κεφάλαιο 10, περιέχει τα συμπεράσματα. Τέλος, παραθέτουμε τα παραρτήματα με τις αποδείξεις και τους κώδικες.

2 Ευσταθής έλεγχος στη θεωρία επιλογής χαρτοφυλακίου

Μια ιδιαίτερα αξιόλογη εφαρμογή της θεωρίας που αφορά στην αντιμετώπιση οικονομικών προβλημάτων στην περίπτωση ύπαρξης αβεβαιότητας, αποτελεί η διατύπωση και διεξοδική μελέτη του προβλήματος βέλτιστης επιλογής χαρτοφυλακίου του *Merton* [53], [54], σαν ένα πρόβλημα ευσταθούς ελέγχου. Ειδικότερα, αναφορικά σε αυτό ο *Maenhout* [52] στηριζόμενος στη θεωρία όπως αυτή διατυπώθηκε από τους *Hansen* και *Sargent*, αντιμετώπισε το πρόβλημα στην περίπτωση όπου οι προτιμήσεις του επενδύτη-καταναλωτή περιγράφονται από μία σταθερού σχετικού συντελεστή αποστροφής κινδύνου, *CRRA*, (Constant Relative Risk Aversion), συνάρτηση χρησιμότητας και οι επενδυτικές του δυνατότητες περιορίζονται σε μία αξία σταθερής απόδοσης και μία η οποία χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα. Ο *Maehout* μελέτησε το πρόβλημα στην περίπτωση τόσο σταθερού όσο και στοχαστικού συνόλου επενδυτικών επιλογών, το βασικό του δε αποτέλεσμα ήταν ένας προσαρμοσμένος κανόνας τύπου *Merton*, όπου η προτίμηση για έλεγχο της ευστάθειας του μοντέλου μειώνει δραματικά τη ζήτηση για την αξία η οποία δεν χαρακτηρίζεται από σταθερή απόδοση. Στην προσπάθεια του να λύσει αναλυτικά το πρόβλημα κάνει χρήση ενός ομοθετικού επιχειρήματος και δείχνει ότι στην περίπτωση αυτή το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με εκείνο της «Stochastic Differential Utility» των *Duffie* και *Epstein*, [19], που αποτελεί την σε συνεχή χρόνο έκδοση της εργασίας των *Epstein* και *Zin* [26]. Με τον μετασχηματισμό όμως αυτόν, μετατρέπει την εξωγενή παράμετρο θ , σε συνάρτηση της συνάρτησης αξίας του προβλήματος, ενδογενοποιώντας την με τον τρόπο αυτό, γεγονός που έχει ως αποτέλεσμα να σπάσει ο σύνδεσμος με τους *Gilboa* και *Schmeidler* και την αξιωματική θεμελίωση του *Uncertainty Aversion*, δηλαδή της αποστροφής στην αβεβαιότητα.

Η επέκταση της παραπάνω εργασίας στην περίπτωση n αξιών που εμπεριέχουν αβεβαιότητα παρέχεται από τους *Uppal* και *Wang* [73]. Αυτοί στοχεύουν στην ανάπτυξη μίας μεθοδολογίας η οποία επιτρέπει αβεβαιότητα ως προς την από κοινού κατανομή των αποδόσεων όλων των αξιών που θεωρούνται στο χαρτοφυλάκιο, όσο και ως προς την περιθώρια κατανομή των αποδόσεων καθενός ενός εκ των υποσύνολων που δύναται να θεωρηθεί. Αυτοί ελέγχουν το μοντέλο τους θεωρώντας τις αποδόσεις ενός διεθνούς χαρτοφυλακίου και δείχνουν ότι όταν η αβεβαιότητα ως προς την από κοινού κατανομή του χαρτοφυλακίου είναι υψηλή, τότε αρχούν μικρές διαφορές στην αβεβαιότητα ως προς την περιθώρια κατανομή για να οδηγηθούμε σε υψηλή διαφοροποίηση συγκριτικά με το μοντέλο του *Merton*. Άλλη μία εργασία που έχει την βάση της σε αυτή του *Maehout* είναι αυτή των *Liu Pan* και *Wang* [50], οι οποίοι αντιμετωπίζουν την περίπτωση ύπαρξης σπανίων γεγονότων, προσθέτοντας έναν όρο που αντιστοιχεί σε *Poisson jumps*, στην εξίσωση που περιγράφει την εξέλιξη της τιμής του χαρτοφυλακίου. Όμως και στις δύο παραπάνω εργασίες

χρησιμοποιείται το ίδιο όχι τόσο αυστηρό επιχείρημα που ενδογενοποιεί την παράμετρο ευσταθείας. Εναλλακτικά, σε αυτές, είναι η εργασία του *Pathak* [59] η οποία στοχεύει στην εξάλειψη της παραμέτρου θ με τη χρήση των *Multiple Priors Models*. Αναλυτικότερα, αυτό επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας την *K – Ignorance* μεθοδολογία όπως στην εργασία των *Chen Epstein* [16], καθορίζοντας εξαρχής τη χειρότερη δυνατή διαταραχή. Το αποτέλεσμα που προκύπτει με τη χρήση αυτής της μεθοδολογίας είναι ένας κανόνας σαν αυτό του *Merton* με μικρότερη μέση αναμενόμενη τιμή.

Ένα από τα κύρια συμπεράσματα που προκύπτουν στις περισσότερες των περιπτώσεων, σαν αποτέλεσμα της εφαρμογής της θεωρίας του ευσταθούς ελέγχου είναι ότι η επιθυμία για έλεγχο της ευστάθειας του μοντέλου συνήθως οδηγεί σε συντηρητικότερη συμπεριφορά. Στην παρούσα διατριβή, αρχικά, κάνοντας χρήση της θεωρίας του ευσταθούς ελέγχου θα αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα βέλτιστης επιλογής χαρτοφυλακίου του *Merton* λαμβάνοντας υπόψη την ύπαρξη αβεβαιότητας και θα εξετάσουμε αν και πότε η θεωρία οδηγεί σε επιθετικότερη συμπεριφορά συγκριτικά με το παραδοσιακό μοντέλο που αντιστοιχεί στην περίπτωση αποστροφής κινδύνου. Σε αυτή την εργασία οι ευσταθείς κανόνες παραμετροποιούνται με τη βοήθεια της παραμέτρου ευστάθειας θ η οποία όσο μεγαλύτερες τιμές λαμβάνει δείχνει μεγαλύτερη σιγουριά στο αρχικό μοντέλο αναφοράς ². Τα αποτελέσματα, δε, που λαμβάνονται είναι ανεξάρτητα των τιμών αυτής της παραμέτρου, η οποία δεν ενδογενοποιείται όπως στις παραπάνω εργασίες και με τον τρόπο αυτό δεν σπάει ο σύνδεσμος με τους *Gilboa Schmeidler*. Στην παρούσα εργασία το ενδιαφέρον εστιάζεται κυρίως στις *multiplier* προτιμήσεις, δηλαδή προτιμήσεις που ορίζονται με τη βοήθεια πολλαπλασιαστή. Υπάρχουν δύο λόγοι που μπορεί χωρίς πρόβλημα να γίνει αυτό. Ο πρώτος είναι ότι σχετίζονται με το «*constrained*» πρόβλημα, όποτε είναι σε συνέπεια με το αξίωμα του *Uncertainty Aversion* και τους *Gilboa Schmeidler*, ενώ ο δεύτερος είναι ότι οι «*multiplier*» προτιμήσεις έχουν θεμελιωθεί αξιωματικά από τον *Wang* [77], [78]. Επιπλέον, ο *Wang* έχει δείξει ότι αυτές οι προτιμήσεις που θεμελιώνει αξιωματικά είναι σε συνέπεια με τον *Elsberg*, οπότε αναλύουμε ένα πρόβλημα επιλογής χαρτοφυλακίου που είναι σε πλήρη συνέπεια με τη συμπεριφορά κατά *Elsberg*.

Ειδικότερα στο επόμενο κεφάλαιο αρχικά παρουσιάζεται η γενική περίπτωση του μοντέλου μας με μία αξία σταθερής απόδοσης και n το πλήθος αξίες όπου η εξέλιξη της τιμής τους χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα. Έπειτα, παρουσιάζεται η λύση στην ειδική περίπτωση όπου $n = 1$ και δίνεται αριθμητική επίλυση για μία *CRRA* συνάρτηση χρησιμότητας. Παρακάτω, στο κεφάλαιο 4 αντιμετωπίζουμε την περίπτωση όπου έχουμε δύο αξίες που χαρακτηρίζονται από αβεβαιότητα, όπου θεωρούμε τόσο ίδια όσο και διαφορετικά επίπεδα αβεβαιότητας μεταξύ των αξιών αυτών. Επίσης, επιλύουμε για την ίδια συνάρτηση

²Για μία εκτενή συζήτηση αναφορικά με την εκτίμηση της παραμέτρου θ παραπέμπουμε στην εργασία των *Andersen et al.* [3], όπου αναπτύσσεται η *statistical detection* μεθοδολογία.

χρησιμότητας και παρουσιάζουμε τη λύση για n το πλήθος αξίες με διαφορετικά επίπεδα αβεβαιότητας. Ειδικότερα, όταν έχουμε δύο αξίες με ίδια επίπεδα αβεβαιότητας δείχνουμε ότι είναι δυνατόν να αυξήσουμε τα επενδυόμενα διαθέσιμα στη μία μόνο από τις δύο αξίες, στην περίπτωση που έχουμε υψηλή τιμή του συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των *Brownian* κινήσεων που χαρακτηρίζουν την εξέλιξη της τιμής των δύο αξιών, συγκρινόμενα με αυτά του τύπου του *Merton* που αντιστοιχεί στην κλασσική περίπτωση αποστροφής κινδύνου. Επίσης, σε αυτή την περίπτωση κάτω από κατάλληλες συνθήκες μεταξύ των τιμών των παραμέτρων του προβλήματος δύναται τα συνολικά διαθέσιμα να είναι αυξημένα σχετικά με την κλασσική περίπτωση. Το ίδιο αποτέλεσμα, με διαφορετικές συνθήκες αποδεικνύουμε και στην περίπτωση διαφορετικών επιπέδων αβεβαιότητας μεταξύ των δύο αξιών. Επιπλέον, με τη βοήθεια των αποτελεσμάτων στην περίπτωση διαφορετικών επιπέδων αβεβαιότητας δίνεται μία εξήγηση για το «home bias puzzle».³

Στη συνέχεια θεωρούμε ένα στοχαστικό σύνολο επενδυτικών επιλογών, δηλαδή επιτρέπουμε στη μέση αναμενόμενη τιμή και τυπική απόκλιση που χαρακτηρίζει τις γεωμετρικές κινήσεις *Brown* μέσω των οποίων μοντελοποιείται η εξέλιξη της τιμής των αξιών, να εξελίσσονται και αυτές στοχαστικά στο χρόνο, δηλαδή να περιγράφεται και αυτών η κίνηση τους μέσω γεωμετρικών κινήσεων *Brown* και αντιμετωπίζουμε αρχικά τη περίπτωση όπου το χαρτοφυλάκιο μας αποτελείται από μία αξία με σταθερή απόδοση και μία όπου χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα. Αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα τόσο με ίδια όσο και με διαφορετικά επίπεδα αβεβαιότητας ως προς την εξίσωση που περιγράφει την εξέλιξη της τιμής της αξίας που δεν χαρακτηρίζεται από σταθερή απόδοση, καθώς επίσης και της μέσης αναμενόμενης τιμής ή τυπικής απόκλισης αυτής. Ειδικότερα εδώ αποδεικνύουμε κανόνες, σύμφωνα με τους οποίους δεν γινόμαστε επιθετικότεροι σε σχέση με τη περίπτωση αποστροφής κινδύνου. Γενικά σε αυτή τη περίπτωση δε μπορούμε να αποδείξουμε αναλυτικά, θεωρητικά επιθετικότερη συμπεριφορά σε σχέση με το παραδοσιακό περιβάλλον, αλλά ίσως με αριθμητικούς υπολογισμούς για συγκεκριμένες συναρτήσεις να ισχύει κάτι τέτοιο.

Έπειτα, αυξάνοντας περισσότερο τη πολυπλοκότητα του μοντέλου μας θεωρούμε μία επιπλέον δεύτερη αξία όπου δεν χαρακτηρίζεται από σταθερή απόδοση και λύνουμε το πρόβλημα στην περίπτωση ίδιων και διαφορετικών επιπέδων αβεβαιότητας μεταξύ αυτών των αξιών. Εδώ, στην περίπτωση διαφορετικών επιπέδων αβεβαιότητας δείχνουμε ότι δύναται να έχουμε επιθετικότερη συμπεριφορά στη μία από τις δύο αξίες μόνο, όσο επίσης και στο σύνολο αλλά ποτέ

³Έχουν γίνει αρκετές προσπάθειες για να εξηγηθεί το home bias puzzle. Για παράδειγμα οι *Strong* και *Xu* [71], εξηγούν το παράδοξο βάσει της οπτιμιστικής συμπεριφοράς των διαχειριστών απέναντι στην εγχώρια αγορά αξιών. Ο *Serrat* [67], θεωρεί μη διαπραγματεύσιμα αγαθά τα οποία μετατοπίζουν την περιθώρια χρησιμότητα διαπραγματεύσιμων αγαθών. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα δυναμικές πολιτικές αντιστάθμισης που είναι σε συνέπεια με το παράδοξο, ενώ οι *French* και *Poterba* [28], θεωρούν το κόστος πληροφόρησης σαν μία εξήγηση για αυτό.

και στις δύο αξίες ταυτόχρονα. Τέλος, θεωρώντας αποστροφή στην αβεβαιότητα ως προς την εξέλιξη της τιμής της μίας μόνο αξίας, ενώ ως προς την άλλη απλά αποστροφή στον κίνδυνο, δείχνουμε ότι είναι πιο πιθανό να έχουμε πιο επιθετική συμπεριφορά στην αξία όπου πιστεύουμε ότι γνωρίζουμε την εξίσωση εξέλιξη της τιμής της. Βάσει του τελευταίου παρέχουμε όπως και στην περίπτωση σταθερού συνόλου επενδυτικών δυνατοτήτων μία εξήγηση για το «home bias puzzle».

3 Ευσταθείς κανόνες επιλογής χαρτοφυλακίου

Στο κεφάλαιο αυτό, αρχικά θα αναλύσουμε το γενικό μοντέλο στην περίπτωση όπου έχουμε μία αξία σταθερής απόδοσης και n το πλήθος αξίες όπου χαρακτηρίζονται από ίδια επίπεδα αβεβαιότητας ως προς την εξέλιξη της τιμής τους. Έπειτα, θα δούμε την ειδική περίπτωση αυτού του μοντέλου για $n = 1$ και θα επιλύσουμε αυτό για μία *CRAA* συνάρτηση χρησιμότητας.

3.1 Το μοντέλο μας

Θεωρούμε μία αγορά, η οποία αποτελείται από μία αξία στην οποία η επένδυση χαρακτηρίζεται ως μηδενικού κινδύνου, η εξέλιξη, δε, της τιμής της είναι δυνατόν να περιγραφεί από την παρακάτω εξίσωση:

$$dS(t) = rS(t)dt \quad S(0) = S_0, \quad t \geq 0,$$

όπου με r συμβολίζουμε το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο και από $i = 1, \dots, n$ αξίες στις οποίες η επένδυση δεν συνοδεύεται από σταθερή απόδοση, αλλά χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα. Συμβολίζοντας με $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ τις μέσες αναμενόμενες αποδόσεις και με $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, τις αντίστοιχες τυπικές αποκλίσεις, τότε η εξέλιξη των τιμών $P = [\text{diag}(P_1, P_2, \dots, P_n)]$ των n αξιών, είναι δυνατόν να περιγραφεί, με τη βοήθεια πινάκων, από το παρακάτω σύστημα στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων:

$$dP = PAdt + P\Sigma RdB \quad (3.1)$$

όπου A, Σ , είναι $n \times n$ διαγώνιοι πίνακες, με διαγώνια στοιχεία α_i, σ_i αντίστοιχα. R^4 , είναι ένας πίνακας τέτοιος ώστε ο $\Sigma R(\Sigma R)^T$ να είναι ίσος με τον πίνακα διακυμάνσεων, συνδιακυμάνσεων και $B = [B_1, B_2, \dots, B_n]^T$ ⁵ είναι n ανεξάρτητες κινήσεις Brown ορισμένες σε ένα χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}) , εφοδιασμένο με μέτρο πιθανότητας το καρτεσιανό γινόμενο $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{P}_n$.

Η λύση του Merton [53], [54], στο πρόβλημα της βέλτιστης επιλογής χαρτοφυλακίου, για το πρόβλημα του άπειρου χρονικού ορίζοντα στην περίπτωση n αξιών που εμπεριέχουν κίνδυνο, ορίζεται από το πρόβλημα:

$$\max_{w_i, C} \mathbb{E}_0 \int_0^\infty e^{-\delta t} U(C) dt \quad (3.2)$$

όπου U είναι μια συνηθισμένη συνάρτηση χρησιμότητας με $U'(\cdot) > 0$, $U''(\cdot) < 0$. Η λύση του προβλήματος καθορίζει το βέλτιστο ποσοστό επένδυσης w_i , το

⁴Ένα τυπικό στοιχείο του πίνακα R θα δούμε στην παρακάτω ενότητα όπου θα μελετήσουμε την περίπτωση δυο αξιών στις οποίες η επένδυση εμπεριέχει κίνδυνο και χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα.

⁵Ο δείκτης T συμβολίζει τον ανάστροφο ενός πίνακα.

οποίο είναι το κλάσμα του συνολικού χαρτοφυλακίου, W , που κατανέμεται σε κάθε μία αξία, i και δίνεται από το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} w_i W &= A \sum_{j=1}^n \Upsilon_{ij}^{-1} (\alpha_i - r) \quad i = 1, \dots, n \quad (3.3) \\ A &= -\frac{V_W}{V_{WW}} = -\frac{U'(C)}{U''(C) \frac{\partial C}{\partial W}} \end{aligned}$$

όπου V είναι η συνάρτηση αξίας (*value function*) του προβλήματος, V_W , V_{WW} , η πρώτη και δεύτερης τάξης μερική παράγωγος ως προς το συνολικό εισόδημα W και Υ^{-1} είναι ο αντίστροφος του πίνακα διακυμάνσεων συνδιακυμάνσεων.

Ακολουθώντας τους Hansen Sargent [36], Hansen et al. [39], το μοντέλο (3.1), θεωρούμε ότι είναι το μοντέλο αναφοράς. Αν ο καταναλωτής-επενδυτής ήταν σίγουρος για το αρχικό μοντέλο αναφοράς, τότε δεν θα υπήρχε καμία ανησυχία για την ευστάθεια του μοντέλου και αν αυτό είναι πλήρως καθορισμένο η όχι. Διαφορετικά, μια τέτοια ανησυχία, σχετικά με το αρχικό μοντέλο αναφοράς, είναι δυνατόν να αποτυπωθεί λαμβάνοντας μία οικογένεια στοχαστικών διαταραχών. Εξαιτίας του ότι υπάρχουν n ανεξάρτητες στοχαστικές κινήσεις, κάθε μία από αυτές είναι δυνατόν να διαταραχθεί ξεχωριστά έτσι ώστε:⁶

$$B_i(t) = \hat{B}_i(t) + \int_0^t h_i(s) ds, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.4)$$

όπου $\{\hat{B}_i(t) : t \geq 0\}$ είναι κινήσεις *Brown*, και $\{h_i(t) : t \geq 0\}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Ακολουθώντας αυτή τη διαδικασία τα αρχικά μέτρα πιθανότητας που αφορούσαν στην αρχική εξίσωση (3.1), με τον τρόπο αυτό διαταράσσονται. Επομένως, το μέτρο πιθανότητας \mathcal{P} αντικαθίσταται από ένα άλλο μέτρο πιθανότητας $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \otimes \mathcal{Q}_2, \dots, \otimes \mathcal{Q}_n$. Όπως έχει αποδειχθεί από τους Hansen et al. [39] η απόσταση μεταξύ των δύο αυτών κατανομών πιθανότητας \mathcal{P} και \mathcal{Q} είναι δυνατόν να μετρηθεί χρησιμοποιώντας ένα μέτρο σχετικής εντροπίας, $R(\mathcal{Q} \parallel \mathcal{P})$. Σε αυτό το στάδιο θα θεωρήσουμε διαταραχές στην από κοινού κατανομή πιθανότητας των αξιών, άρα επομένως θα χρησιμοποιήσουμε ένα από κοινού περιορισμό εντροπίας για τις n αυτές αξίες. Βάσει του λήμματος C3.3 των Dupuis Ellis [21], στην περίπτωση αυτή η εντροπία ισούται με:

$$R(\mathcal{Q} \parallel \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n R(\mathcal{Q}_i \parallel \mathcal{P}_i) = \sum_{i=1}^n \int_0^\infty e^{-\delta u} \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \left(\frac{h_i^2}{2} \right) du. \quad (3.5)$$

Η παραπάνω εξίσωση μας επιτρέπει να θεωρήσουμε n ξεχωριστές διαταραχές μία για κάθε αξία ξεχωριστά. Για να μειώσουμε όμως τη πολυπλοκότητα του μοντέλου μας, αρχικά υποθέτουμε ότι έχουμε συμμετρικώς διαταραγμένα

⁶ Αυτός είναι και ο λόγος που χρησιμοποιούμε αυτή την ειδική μορφή της εξίσωσης (3.1).

μέτρα Q_i , και εξετάζουμε την περίπτωση με ίδια h_i . Σε αυτή τη συγκεκριμένη περίπτωση η εξίσωση η οποία περιγράφει την εξέλιξη της τιμής του συνολικού διαθέσιμου ποσού του καταναλωτή είναι η παρακάτω

$$dW = \left(rW - c + \sum_{i=1}^n w_i(\alpha_i - r)W + h \sum_{i=1}^n \sigma_i R_{ri} w_i W \right) dt \quad (3.6)$$

$$+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_j \sigma_j W R_{ij} d\hat{B}_i$$

όπου $R_{ri} = \sum_{j=1}^n R_{ij}$,⁷ είναι το i^o στοιχείο ενός πίνακα, κάθε στοιχείο του οποίου ισούται με το άθροισμα των στοιχείων της i γραμμής του πίνακα R . Στην περίπτωση που ο επενδύτης πιστεύει ότι το μοντέλο του δεν είναι πλήρως καθορισμένο, ένα πολλαπλασιαστικό πρόβλημα ευσταθούς ελέγχου μπορεί να συσχετιστεί με το πρόβλημα της μεγιστοποίησης της παρούσας αξίας της μέσης τιμής της χρησιμότητας του επενδύτη:

$$\max_{w_i, C} \mathbb{E}_0 \int_0^\infty e^{-\delta t} U(C) dt \quad (3.7)$$

Σε αυτή την περίπτωση το πολλαπλασιαστικό πρόβλημα ευσταθούς ελέγχου γίνεται:

$$J(\theta) = \sup_{w_i, C} \inf_h \mathbb{E}_Q \int_0^\infty e^{-\delta t} \left[U(C) + \theta_n \frac{h^2}{2} \right] dt \quad (3.8)$$

μ.π. (3.6).

Στην παραπάνω σχέση εξαιτίας της εξίσωσης (3.5) $\theta_n = n\theta$, όπου με θ συμβολίζουμε τη παράμετρο ευστάθειας η οποία παίρνει τιμές μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός. Επομένως έχουμε υποθέσει ότι η ανησυχία σχετικά με το αβεβαιότητα του μοντέλου μας είναι ίδια για όλες τις αξίες. Όπως έχει αποδειχθεί από τους Hansen Sargent [36], η παράμετρος θ παίζει το ρόλο του πολλαπλασιαστή του Lagrange, σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης και συσχετίζεται με την ακόλουθη συνθήκη εντροπίας $\mathcal{Q}(\tau) = \{Q \in \mathcal{Q} : R_t(Q \parallel \mathcal{P}) \leq \tau \ \forall t\}$. Μία τιμή του $\theta = \infty$ δηλώνει ότι είμαστε απόλυτα σίγουροι για το αρχικό μας μοντέλο και για το μέτρο αναφοράς και δεν ενδιαφερόμαστε για την ευστάθεια αυτού. Αυτή η περίπτωση ουσιαστικά είναι εκείνη όπου ο επενδυτής χαρακτηρίζεται από αποστροφή στον κίνδυνο και το πρόβλημα μας καταλήγει σε αυτό του Merton, όπου ο στόχος δίνεται από την εξίσωση (3.7). Μικρότερες τιμές της παραμέτρου υποδηλώνουν ότι ο επενδύτης πιστεύει ότι το μοντέλο του δεν είναι πλήρως καθορισμένο και ανησυχεί για την ευστάθεια αυτού. Είμαστε, λοιπόν, τώρα στην περίπτωση της αποστροφής στην αβεβαιότητα όπου ειδικά μία τιμή του $\theta = 0$ δηλώνει ότι δεν έχουμε καθόλου γνώση για το αρχικό μας μοντέλο και το μέτρο \mathcal{P} .

⁷ Στην περίπτωση των δύο αξιών που θα εξετάσουμε παρακάτω: $R_{r1} = 1$, $R_{r2} = \rho + \sqrt{1 - \rho^2}$, όπου με ρ συμβολίζουμε τον συντελεστή συσχέτισης.

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των Fleming Souganidi, [27] αναφορικά με την ύπαρξη αναδρομικής λύσης στο παραπάνω πολλαπλασιαστικό πρόβλημα, οι Hansen et al. [39], αποδεικνύουν ότι το πρόβλημα μπορεί να μετατραπεί σε ένα στοχαστικό διαφορικό παίγνιο μεταξύ του επενδυτή και της φύσης. Η φύση παίζει το ρόλο ενός εχθρικού παίκτη και επιλέγει το h κατά τέτοιο τρόπο ώστε να μειώσει τη μέση τιμή της χρησιμότητας του επενδυτή. Η Bellman-Isaacs, συνθήκη που αντιστοιχεί στο παραπάνω πρόβλημα δείχνει ότι η συνάρτηση αξίας του προβλήματος $V(W, \theta)$, ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση.

$$\begin{aligned} \delta V = \max_{w_i, C} \min_h \left\{ U(C) + \left(rW - c + \sum_{i=1}^n w_i(\alpha_i - r)W \right. \right. & (3.9) \\ \left. \left. + h \sum_{i=1}^n \sigma_i R_{ri} w_i W \right) V_W + \theta_n \frac{h^2}{2} + \frac{1}{2} V_{WW} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} W^2 \right\}. \end{aligned}$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης που περιγράφουν τη λύση του παραπάνω παιγνίου μεταξύ του καταναλωτή και της φύσης είναι οι παρακάτω:

$$U'(C) = V_W \quad (3.10)$$

$$h = -\frac{V_W W \sum_{i=1}^n w_i \sigma_i R_{ri}}{\theta_n} \quad (3.11)$$

$$\sum_{j=1}^n w_j W \sigma_{ij} = A(\alpha_i - r) + A \sigma_i R_{ri} h, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.12)$$

$$A = -\frac{V_W}{V_{WW}} = -\frac{U'(C)}{U''(C) \frac{\partial C}{\partial W}} \quad (3.13)$$

Από το παραπάνω σύστημα των εξισώσεων είναι δυνατόν εύκολα ναδειχθεί ότι καθώς $\theta \rightarrow \infty$ η λύση μας συμπίπτει με αυτή του Merton, η οποία περιγράφεται από την σχέση (3.3). Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.11) έτσι ώστε να εξαλείψουμε το h από την εξίσωση (3.12), λαμβάνουμε ότι τα βέλτιστα ευσταθή βάρη ή διαφορετικά το ποσοστό του χαρτοφυλακίου που επενδύεται σε κάθε μία αξία δίνεται από τη σχέση:

$$w_i^* W = A \sum_{j=1}^n v_{ij}^{-1} (\alpha_j - r), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.14)$$

όπου v^{-1} είναι ο αντίστροφος του πίνακα :

$$[v_{ij}] = [(\Sigma D \Sigma)_{ij}] \quad (3.15)$$

$$D_{ij} = \left(\rho_{ij} - \frac{V_W^2}{\theta_n V_{WW}} R_{ri} R_{rj} \right) \quad (3.16)$$

και ρ_{ij} είναι ο συντελεστής συσχέτισης ανάμεσα στα i και j στο μοντέλο αναφοράς ($\sigma_{ij} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$). Για να καθορίσουμε τη μεταβολή του χαρτοφυλακίου που επενδύεται στην περίπτωση της αποστροφής της αβεβαιότητας σε

σχέση με εκείνη της αποστροφής στον κίνδυνο, αφαιρούμε από την εξίσωση (3.3) την σχέση (3.14) και τελικά λαμβάνουμε ότι:⁸

$$W(w_i - w_i^*) = W\Delta w_i = A \sum_{j=1}^n [\Sigma^{-1}(\Pi^{-1} - D^{-1})\Sigma^{-1}]_{ij}(\alpha_j - r), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.17)$$

όπου, $\Pi = RR'$ είναι ο πίνακας των συντελεστών συσχέτισης. Αν $\Delta w_i < (>)0$, τότε βάσει της θεωρίας του ευσταθούς έλεγχου, η αποστροφή στην αβεβαιότητα, αυξάνει (μειώνει) τα διαθέσιμα που επενδύονται στην αξία σε σχέση με την περίπτωση αποστροφής στον κίνδυνο.

Η συνολική μεταβολή των επενδύμενων ποσών ανάμεσα στην περίπτωση αποστροφής στην αβεβαιότητα και αποστροφής στον κίνδυνο βάσει της (3.17) ισούται με:

$$W\Delta w = W \sum_{i=1}^n \Delta w_i = A \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\Sigma^{-1}(\Pi^{-1} - D^{-1})\Sigma^{-1}]_{ij}(\alpha_j - r) \quad (3.18)$$

Αν $\Delta W < (>)0$, η αποστροφή στην αβεβαιότητα οδηγεί σε αύξηση (μείωση) των συνολικών διαθέσιμων που επενδύονται στις αξίες που χαρακτηρίζονται από αβεβαιότητα σε σχέση με την περίπτωση αποστροφής στον κίνδυνο.

Στη συνέχεια, παρακάτω, για να λάβουμε συνθήκες όπου τα πρόσημα των Δw_i , Δw , μπορούν να καθοριστούν και να παρουσιαστούν ευκολότερα θεωρούμε τις περιπτώσεις:

3.2 Ευσταθείς κανόνες κατανομής χαρτοφυλακίου με μία αξία που εμπεριέχει αβεβαιότητα

Θεωρούμε ότι ο επενδυτής-καταναλωτής έχει τη δυνατότητα να επενδύσει σε μία αξία με σταθερή απόδοση r , όπου η εξέλιξη της τιμής της περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$dS(t) = rS(t)dt \quad S(0) = S_0, \quad t \geq 0,$$

καθώς επίσης και σε μία άλλη αξία, της οποίας η εξέλιξη της τιμής της P_1 υποθέτουμε ότι ικανοποιεί μία γεωμετρική κίνηση Brown:

$$\begin{aligned} dP(t) &= \alpha_1 P(t)dt + \sigma_1 P(t)dB_1(t) \quad t \geq 0, \\ P(0) &= P_0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

όπου με α_1 συμβολίζουμε τη μέση αναμενόμενη απόδοση και με σ_1 την τυπική απόκλιση. $\{B_1(t) : t \geq 0\}$ είναι μία μονοδιάστατη κίνηση σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Έστω ότι με w_1, w_2 συμβολίζουμε τα ποσοστά του

⁸Για πολύ μικρές μεταβολές στην τιμή του θ , είναι μία βασική άσκηση συγκριτικής στατικής για να χαρακτηρίσουμε τις μεταβολές $\partial w_i^* / \partial \theta$.

χαρτοφυλακίου W , τα οποία κατανέμονται στη δεύτερη και την πρώτη επιλογή αντίστοιχα. Θα ικανοποιείται, δε, η εξίσωση $w_1 + w_2 = 1$. Επομένως, η εξίσωση που ικανοποιεί το συνολικό εισόδημα του επενδύτη είναι η επόμενη:⁹

$$dW = w_1(\alpha_1 - r)Wdt + (rW - C)dt + W\sigma_1 w_1 dB_1, \quad (3.21)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, με C συμβολίζουμε το ρυθμό κατανάλωσης του επενδυτή. Η λύση του Merton, [53], [54], για το πρόβλημα της βέλτιστης επιλογής χαρτοφυλακίου

$$\max_{w_1, C} \mathbb{E}_0 \int_0^\infty e^{-\delta t} U(C) dt \quad (3.22)$$

είναι η παρακάτω:

$$U'(C) = V_W, \quad (3.23)$$

$$w_1 = \frac{(r - \alpha_1) V_W}{\sigma^2 W V_{WW}}, \quad (3.24)$$

$$\frac{V_W}{V_{WW}} = \frac{U'(C)}{U''(C) \frac{\partial C}{\partial W}} < 0. \quad (3.25)$$

Ακολουθώντας την διαδικασία την οποία περιγράψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, θεωρούμε ότι το μοντέλο το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση (3.19) είναι το μοντέλο αναφοράς. Προκαλώντας μία διαταραχή στο μοντέλο μας, αντικαθιστώντας την κίνηση $B_1(t)$ από την:

$$B_1(t) = \hat{B}_1(t) + \int_0^t h(s) ds, \quad (3.26)$$

όπου $\{\hat{B}_1(t) : t \geq 0\}$ είναι μία άλλη Brownian κίνηση και $\{h(t) : t \geq 0\}$ μία μετρήσιμη συνάρτηση, το μέτρο \mathcal{P} αντικαθίσταται από ένα άλλο μέτρο πιθανότητας \mathcal{Q} . Επομένως χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.26), η σχέση (3.21) που αναφέρεται στην εξέλιξη του εισοδήματος γίνεται

$$dW = w_1(\alpha_1 - r + \sigma_1 h)Wdt + (rW - C)dt + W\sigma_1 w_1 d\hat{B}_1. \quad (3.27)$$

Η απόσταση μεταξύ των δύο πιθανοθεωρητικών μέτρων \mathcal{P} και \mathcal{Q} δίνεται από τη σχέση:

$$R(\mathcal{Q}) = \int_0^\infty e^{-\delta u} \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \left(\frac{h^2}{2} \right) du \quad (3.28)$$

⁹Για να δούμε βάσει ποιας εξίσωσης εξελίσσεται το εισόδημα του καταναλωτή χρησιμοποιούμε τη σχέση:

$$dW = \sum_{i=1}^2 \frac{w_i W}{P_i} (\alpha_i P_i dt + \sigma_i P_i dB_i) - c dt, \quad (3.20)$$

όπου $w_i = \frac{N_i P_i}{W}$ και N_i ο αριθμός των μεριδίων της αξίας i που κατανέμονται στους μετόχους. Θέτοντας $\alpha_2 = r, \sigma_2 = 0$, για την αξία σταθερής απόδοσης έχουμε το ζητούμενο.

και αν το $R(\mathcal{Q})$ είναι πεπερασμένο, τότε:

$$\mathcal{Q}\left\{\int_0^\infty h^2 du < \infty\right\} = 1 \quad (3.29)$$

με το μέτρο \mathcal{Q} να είναι απόλυτα συνεχές ως προς το \mathcal{P} .

Στην περίπτωση, λοιπόν, που ο επενδυτής ανησυχεί για το μοντέλο αναφοράς του, το πολλαπλασιαστικό πρόβλημα ευσταθούς ελέγχου το οποίο σχετίζεται με τη μεγιστοποίηση της ωφελιμότητας:

$$\max_{w_1, C} \mathbb{E}_0 \int_0^\infty e^{-\delta t} U(C) dt.$$

δίνεται από τη σχέση:

$$J(\theta) = \sup_{w_1, C} \inf_h \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \int_0^\infty e^{-\delta t} [U(C) + \theta \frac{h^2}{2}] dt \quad (3.30)$$

μ.π. (3.27).

Ακολουθώντας τη διαδικασία την οποία περιγράψαμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο οδηγούμαστε στο ότι η συνάρτηση αξίας $V(W, \theta)$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$\begin{aligned} \delta V = \max_{w_1, C} \min_h \left\{ U(C) + \theta \frac{h^2}{2} + (w_1(\alpha_1 - r + \sigma_1 h)W + rW - C) V_W \right. \\ \left. + \frac{1}{2} W^2 \sigma_1^2 w_1^2 V_{WW} \right\}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Η λύση του παραπάνω προβλήματος χαρακτηρίζεται από τις παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned} U'(C) &= V_W, \\ h &= -\frac{\sigma V_W W w_1^*}{\theta}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$w_1^* = \frac{(r - \alpha_1) V_W}{\sigma^2 W V_{WW}} \frac{1}{\left(1 - \frac{V_W^2}{\theta V_{WW}}\right)}, \quad (3.33)$$

$$\frac{V_W}{V_{WW}} = \frac{U'(C)}{U''(C) \frac{\partial C}{\partial W}},$$

όπου με w_1^* συμβολίζουμε το ποσοστό του χαρτοφυλακίου του επενδυτή το οποίο κατανέμεται στην αξία όπου η επένδυση δεν συνοδεύεται από σταθερή απόδοση και ο καταναλωτής που ανησυχεί για την ευστάθεια του μοντέλου που περιγράφει την εξέλιξη της τιμής αναζητεί ευσταθείς κανόνες επιλογής χαρτοφυλακίου. Αν συγκρίνουμε τις ποσότητες w_1 και w_1^* οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις (3.24) και (3.33), αντίστοιχα, λαμβάνουμε λόγω της σχέσης (3.25) ότι:

$$\frac{w_1}{w_1^*} = 1 - \frac{V_W^2}{\theta V_{WW}} > 1. \quad (3.34)$$

Επομένως, ανεξάρτητα της συνάρτησης χρησιμότητας του καταναλωτή και της τιμής της παραμέτρου ευστάθειας η ανησυχία για την ευστάθεια του μοντέλου οδηγεί σε μείωση του επενδυόμενου ποσοστού του χαρτοφυλακίου στην αξία η οποία χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα, συγκρινόμενο με το ποσοστό το οποίο μας δίνει ο τύπος του Merton. Επιπλέον, καθώς το $\theta \rightarrow \infty$ το βέλτιστο ευσταθές ποσοστό τείνει στο βέλτιστο ποσοστό του τύπου του Merton και ο καταναλωτής ενεργεί σαν να ήξερε το μοντέλο του με σιγουριά.

3.2.1 Μία CRRA συνάρτηση χρησιμότητας

Στην προσπάθεια μας να καταλάβουμε πως η προτίμηση για έλεγχο της ευστάθειας του μοντέλου του καταναλωτή επηρεάζει τις επενδυτικές του επιλογές σε αυτό το υποκεφάλαιο θα παρουσιάσουμε την περίπτωση της ευσταθούς επιλογής χαρτοφυλακίου όταν η σχέση προτίμησης του επενδύτη χαρακτηρίζεται από μία σταθερού σχετικού συντελεστή αποστροφής κινδύνου συνάρτηση χρησιμότητας (CRRA) της μορφής $u(C) = C^\gamma$, με $0 < \gamma < 1$, όπου $1 - \gamma$ είναι ο σταθερός συντελεστής αποστροφής κινδύνου. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.23), (3.32), (3.33) στην (3.31) βλέπουμε ότι η παράμετρος Q ικανοποιεί τη σχέση:

$$\begin{aligned} \delta &= Q^{\frac{1}{\gamma-1}} - \frac{1}{\theta} \frac{(r - \alpha_1)^2}{\sigma_1^2} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right)^2 Q^3 W^\gamma \left(\frac{1}{1 - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{1}{\theta} Q^2 W^\gamma} \right)^2 \\ &+ \gamma(r - Q^{\frac{1}{\gamma-1}}) - \frac{(r - \alpha_1)^2}{\sigma_1^2} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) Q \left(\frac{1}{1 - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{1}{\theta} Q^2 W^\gamma} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{(r - \alpha_1)^2}{\sigma_1^2} \frac{\gamma}{\gamma-1} Q \left(\frac{1}{1 - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{1}{\theta} Q^2 W^\gamma} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Περιορίζοντας το ενδιαφέρον μας σε συναρτήσεις αξιών της μορφής $V(W, \theta) = Q W^\gamma$, υπολογίζουμε αρχικά την τιμή της παραμέτρου Q κάνοντας χρήση της προηγούμενης εξίσωσης και έπειτα με τη βοήθεια της σχέσης (3.33), βρίσκουμε την αντίστοιχη τιμή του βέλτιστου ευσταθούς ποσοστού w_1^* , το οποίο καθώς το θ τείνει στο άπειρο αντιστοιχεί στη λύση του Merton, λόγω της εξίσωσης (3.34). Πιο συγκεκριμένα για τις παρακάτω τιμές των παραμέτρων μας:

$$\delta = 0.05 \quad \alpha_1 = 0.05 \quad \sigma_1 = 0.5 \quad r = 0.03 \quad W = 100$$

οι Εικόνες 1,2 απεικονίζουν τη λύση $\gamma = 0.5$ και $\gamma = 0.75$ αντίστοιχα. Ειδικότερα η πρώτη εικόνα απεικονίζει την τιμή του βέλτιστου ευσταθούς ποσοστού w_1^* , ενώ η επόμενη αντιστοιχεί στο βέλτιστο ρυθμό κατανάλωσης C^* καθώς το θ κινείται από το 0.1 ως το 200.

Από τις παραπάνω εικόνες συμπεραίνουμε ότι, καθώς το $(\theta \rightarrow \infty)$ που σημαίνει ότι η σιγουριά για το αρχικό μοντέλο αναφοράς αυξάνει ή αλλιώς ότι η προτίμηση για έλεγχο της ευσταθείας μειώνεται το βέλτιστο ποσοστό

αυξάνει και τείνει σε αυτό που μας δίνει ο τύπος του Merton. Επιπλέον, η κατανάλωση μειώνεται και συγκλίνει στην τιμή της περίπτωσης της αποστροφής στον κίνδυνο. Όταν, δε, η τιμή του απόλυτου συντελεστή αποστροφής κινδύνου η οποία δίνεται από την $1 - \gamma$ αυξάνει, το βέλτιστο ευσταθές ποσοστό αυξάνει και ο ρυθμός κατανάλωσης μειώνεται για όλες τις τιμές του θ . Επομένως, η κίνηση του βέλτιστου ευσταθούς ποσοστού του χαρτοφυλακίου, καθώς επίσης και του αντιστοίχου ρυθμού κατανάλωσης, συγκριτικά με μία μεταβολή του απόλυτου συντελεστή αποστροφής κινδύνου, είναι η ίδια με αυτή την οποία επάγει ο τύπος του Merton για όλες τις τιμές της παραμέτρου ευστάθειας θ .

[Εικόνα 1]

[Εικόνα 2]

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε το ίδιο πρόβλημα για δύο αξίες που χαρακτηρίζονται από αβεβαιότητα και μία αξία σταθερής απόδοσης.

4 Ευσταθείς κανόνες κατανομής χαρτοφυλακίου με δύο αξίες που εμπεριέχουν αβεβαιότητα

Στο κεφάλαιο αυτό θα αποδείξουμε ευσταθείς κανόνες επιλογής χαρτοφυλακίου στην περίπτωση που έχουμε δύο αξίες οι οποίες χαρακτηρίζονται από αβεβαιότητα, τόσο με ίδια όσο και με διαφορετικά επίπεδα αβεβαιότητας μεταξύ των δύο αξιών. Επίσης, αναφορικά με την πρώτη περίπτωση θα δώσουμε τη λύση του προβλήματος όταν οι προτιμήσεις του επενδυτή χαρακτηρίζονται από μία *CRR* συνάρτηση χρησιμότητας.

4.1 Ίδια επίπεδα αβεβαιότητας μεταξύ των αξιών

Στη συνέχεια, επιδιώκοντας να αυξήσουμε τη ρεαλιστικότητα του μοντέλου μας, υποθέτουμε ότι η αγορά εκτός από τη δυνατότητα επένδυσης σε μία αξία σταθερής απόδοσης, μας παρέχει τη δυνατότητα να επενδύσουμε σε δύο αξίες που η εξέλιξη της τιμής τους χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα και περιγράφεται από τις δύο παρακάτω εξισώσεις:

$$dP_1(t) = \alpha_1 P_1(t)dt + \sigma_1 P_1(t)dB_1(t) \quad t \geq 0 \quad (4.1)$$

$$dP_2(t) = \alpha_2 P_2(t)dt + \sigma_2 P_2(t)dZ_1(t) \quad (4.2)$$

Συμβολίζοντας με ρ το συντελεστή συσχέτισης στο άνω μοντέλο αναφοράς, τότε, ισχύει ότι $\mathbb{E}(dB_1dZ_1) = \rho dt$, όπου με \mathbb{E} συμβολίζουμε μία μαθηματική μέση τιμή. Στην περίπτωση αυτή, αν $B = [B_1, B_2]^T$ είναι ένα διάνυσμα από ανεξάρτητες Brownian κινήσεις ορισμένες σε ένα χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}) , με μέτρο το καρτεσιανό γινόμενο $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$, τότε η εξέλιξη της τιμής των δύο αξιών μπορεί να γράφει ως: ¹⁰

$$dP_1(t) = \alpha_1 P_1(t)dt + \sigma_1 P_1(t)dB_1(t) \quad t \geq 0 \quad (4.3)$$

$$dP_2(t) = \alpha_2 P_2(t)dt + \sigma_2 P_2(t)\rho dB_1(t) + \sigma_2 P_2(t)\sqrt{1 - \rho^2}dB_2(t). \quad (4.4)$$

Η λύση του Merton για το πρόβλημα της βέλτιστης επιλογής χαρτοφυλακίου, (3.7), στην περίπτωση αυτή είναι:

$$w_1 W = \frac{A(\alpha_1 - r)}{\sigma_1^2(1 - \rho_{12}^2)} - \frac{A(\alpha_2 - r)\rho}{\sigma_1\sigma_2(1 - \rho_{12}^2)} \quad (4.5)$$

$$w_2 W = -\frac{A(\alpha_1 - r)\rho}{\sigma_1\sigma_2(1 - \rho_{12}^2)} + \frac{A(\alpha_2 - r)}{\sigma_2^2(1 - \rho_{12}^2)} \quad (4.6)$$

$$A = -\frac{V_W}{V_{WW}} = -\frac{U'(C)}{U''(C)\frac{\partial C}{\partial W}}. \quad (4.7)$$

¹⁰ Έχουμε ότι για δύο ανεξάρτητες κινήσεις Brown B_1, B_2 , ισχύει ότι: $\mathbb{E}(dB_1dB_2) = 0$, $\mathbb{E}(dB_1dB_1) = dt$, οπότε γράφουμε $dZ_1 = \rho dB_1 + \sqrt{1 - \rho^2}dB_2$.

Διαταράσσοντας κάθε μία κίνηση ξεχωριστά, ¹¹ το αρχικό μέτρο αναφοράς \mathcal{P} αντικαθίσταται από το $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \otimes \mathcal{Q}_2$. Σε αυτό το στάδιο, πάλι, θεωρούμε διαταραχές στην από κοινού κατανομή πιθανότητας, οπότε βάσει των Dupuis Ellis, [21] η εντροπία γίνεται:

$$R(\mathcal{Q} \parallel \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^2 R(\mathcal{Q}_i \parallel \mathcal{P}_i) = \sum_{i=1}^2 \int_0^\infty e^{-\delta u} \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \left(\frac{h_i^2}{2} \right) du. \quad (4.8)$$

Θεωρούμε συμμετρικώς διαταραγμένα μέτρα \mathcal{Q}_i και εξετάζουμε την περίπτωση με ίδιους όρους διαταραχής h_i . Τότε, η εξίσωση που περιγράφει την εξέλιξη της τιμής του χαρτοφυλακίου γίνεται:

$$\begin{aligned} dW &= w_1(\alpha_1 - r + \sigma_1 h)W dt + w_2(\alpha_2 - r + \sigma_2(\rho h + h\sqrt{1 - \rho^2}))W dt \\ &\quad + (rW - C)dt + W\sigma_1 w_1 d\hat{B}_1 + W\sigma_2 \rho w_2 d\hat{B}_1 + \\ &\quad \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} w_2 d\hat{B}_2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Στην περίπτωση αυτή, η εξίσωση Bellman που αντιστοιχεί στο πρόβλημα (3.22) μ.π. (4.9), είναι:

$$\begin{aligned} \delta V &= \max_{w_i, C} \min_h \left\{ U(C) + \left(w_1(\alpha_1 - r + \sigma_1 h)W + (rW - c) + \theta_2 \frac{h^2}{2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. w_2(\alpha_2 - r + \sigma_2(\rho + \sqrt{1 - \rho^2})h)W \right) V_W + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} V_{WW} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_i w_j \sigma_{ij} W^2 \right\}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

όπου, εξαιτίας της (4.8) $\theta_2 = 2\theta$ με το θ αυτή τη φορά να αναφέρεται στην παράμετρο ευσταθείας για την περίπτωση δύο αξιών. Οι συνθήκες πρώτης τάξης που περιγράφουν τη λύση του παραπάνω παιγνίου είναι:

$$\begin{aligned} U'(C) &= V_W \\ h &= - \frac{V_W W (\sigma_1 w_1^* + \sigma_2(\rho + \sqrt{1 - \rho^2})w_2^*)}{\theta_2} \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\sum_{j=1}^2 w_j^* W \sigma_{1j} = A(\alpha_1 - r) + A\sigma_1 h \quad (4.12)$$

$$\sum_{j=1}^2 w_j^* W \sigma_{2j} = A(\alpha_2 - r) + A\sigma_2(\rho + \sqrt{1 - \rho^2})h \quad (4.13)$$

$$A = - \frac{V_W}{V_{WW}} = - \frac{U'(C)}{U''(C) \frac{\partial C}{\partial W}}.$$

¹¹ Αυτός είναι και ο λόγος που χρησιμοποιούμε την ειδική μορφή των εξισώσεων (4.3), (4.4).

Αναφορικά με τη λύση του Merton, οι παραπάνω όροι στο τέλος κάθε εξίσωσης αντιστοιχούν στο γεγονός ότι $h \neq 0$. Μπορεί να δειχθεί εύκολα ότι καθώς $\theta_2 \rightarrow \infty$, τότε $h = 0$ και καταλήγουμε στη γνωστή λύση που αντιστοιχεί στην περίπτωση αποστροφής κίνδυνου.

Χρησιμοποιώντας συμβολισμό πινάκων, η λύση του παραπάνω προβλήματος περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} w_1^* W & w_2^* W \end{bmatrix} \Lambda = \begin{bmatrix} A(\alpha_1 - r) & A(\alpha_2 - r) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

όπου, αν με Σ συμβολίσουμε τον διαγώνιο πίνακα με διαγώνια στοιχεία τα σ_1, σ_2 , τότε:

$$\Lambda = \Sigma \begin{bmatrix} (1 - \frac{V_W^2}{\theta_2 V_{WW}}) & (\rho - \frac{V_W^2}{\theta_2 V_{WW}}(\rho + \sqrt{1 - \rho^2})) \\ (\rho - \frac{V_W^2}{\theta_2 V_{WW}}(\rho + \sqrt{1 - \rho^2})) & (1 - \frac{V_W^2}{\theta_2 V_{WW}}(1 + 2\rho\sqrt{1 - \rho^2})) \end{bmatrix} \Sigma. \quad (4.15)$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα, καθορίζουμε το ποσοστό του χαρτοφυλακίου το οποίο επενδύεται σε κάθε μία από τις αξίες όπου αναζητούμε ευσταθείς κανόνες επιλογής χαρτοφυλακίου:

$$\begin{bmatrix} w_1^* W & w_2^* W \end{bmatrix} = \frac{1}{(1 - \rho^2)(1 - 2\frac{V_W^2}{\theta_2 V_{WW}})} \begin{bmatrix} A(\alpha_1 - r) & A(\alpha_2 - r) \end{bmatrix} \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} (1 - \frac{V_W^2}{\theta_2 V_{WW}}(1 + 2\rho\sqrt{1 - \rho^2})) & -\rho + \frac{V_W^2}{\theta_2 V_{WW}}(\rho + \sqrt{1 - \rho^2}) \\ -\rho + \frac{V_W^2}{\theta_2 V_{WW}}(\rho + \sqrt{1 - \rho^2}) & (1 - \frac{V_W^2}{\theta_2 V_{WW}}) \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Στην παραπάνω εξίσωση καθώς το $\theta \rightarrow \infty$ λαμβάνουμε την λύση (4.5), (4.6) που αντιστοιχεί στην περίπτωση αποστροφής κίνδυνου.

Στη συνέχεια όπως και στο προηγούμενο υποκεφάλαιο εξετάζουμε τις μεταβολές $\Delta w_i = w_i - w_i^*$, $i = 1, 2$, ανάμεσα στην περίπτωση εκείνη της αποστροφής στον κίνδυνο, σε σχέση με αυτή της αποστροφής στην αβεβαιότητα. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.5), (4.6), (4.16), λαμβάνουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} W\Delta w_1 & W\Delta w_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(1 - \rho^2)} \begin{bmatrix} A(\alpha_1 - r) & A(\alpha_2 - r) \end{bmatrix} \Sigma^{-1} \Xi \Sigma^{-1} \quad (4.17)$$

όπου:

$$\Xi = \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{(1 - 2\frac{V_W^2}{\theta_2 V_{WW}})} \begin{bmatrix} (1 - \frac{V_W^2}{\theta_2 V_{WW}}(1 + 2\rho\sqrt{1 - \rho^2})) & -\rho + \frac{V_W^2}{\theta_2 V_{WW}}(\rho + \sqrt{1 - \rho^2}) \\ -\rho + \frac{V_W^2}{\theta_2 V_{WW}}(\rho + \sqrt{1 - \rho^2}) & (1 - \frac{V_W^2}{\theta_2 V_{WW}}) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Μετά από κάποιες πράξεις καταλήγουμε στη σχέση:

$$\begin{bmatrix} W\Delta w_1 & W\Delta w_2 \end{bmatrix} = \quad (4.19)$$

$$\frac{AV_W^2 [\alpha_1 - r \quad \alpha_2 - r]}{(1 - \rho^2)(\theta_2 V_{WW} - V_W^2)} \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} 2\rho\sqrt{1 - \rho^2} - 1 & \rho - \sqrt{1 - \rho^2} \\ \rho - \sqrt{1 - \rho^2} & -1 \end{bmatrix} \Sigma^{-1}.$$

Επομένως, η λύση γίνεται:

$$W\Delta w_1 = \frac{\kappa}{\sigma_1} \left[\frac{\alpha_1 - r}{\sigma_1} (2\rho\sqrt{1 - \rho^2} - 1) + \frac{\alpha_2 - r}{\sigma_2} (\rho - \sqrt{1 - \rho^2}) \right] \quad (4.20)$$

$$W\Delta w_2 = \frac{\kappa}{\sigma_2} \left[\frac{\alpha_1 - r}{\sigma_1} (\rho - \sqrt{1 - \rho^2}) - \frac{\alpha_2 - r}{\sigma_2} \right] \quad (4.21)$$

$$\kappa = \frac{AV_W^2}{(1 - \rho^2)(\theta_2 V_{WW} - V_W^2)}. \quad (4.22)$$

Στην παραπάνω εξίσωση το κ είναι πάντοτε ένας αρνητικός αριθμός, άρα αν συμβολίσουμε τη σχετική τιμή κινδύνου με:

$$\lambda = \frac{\frac{\alpha_2 - r}{\sigma_2}}{\frac{\alpha_1 - r}{\sigma_1}} \quad (4.23)$$

λαμβάνουμε ότι:

$$W\Delta w_1 < 0 \quad \text{Αν} \quad \frac{\rho - \sqrt{1 - \rho^2}}{1 - 2\rho\sqrt{1 - \rho^2}} > \frac{1}{\lambda} \quad (4.24)$$

$$W\Delta w_2 < 0 \quad \text{Αν} \quad \rho - \sqrt{1 - \rho^2} > \lambda. \quad (4.25)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις φαίνεται ότι ανεξάρτητα της μορφής που έχει η συνάρτηση χρησιμότητας του καταναλωτή και της τιμής της παραμέτρου ευστάθειας θ , το κλάσμα του ποσοστού του χαρτοφυλακίου το οποίο επενδύεται στην πρώτη αξία είναι αυξημένο σε σχέση με την τιμή που δίνει η λύση του Merton, αν ικανοποιείται η σχέση $\frac{\rho - \sqrt{1 - \rho^2}}{1 - 2\rho\sqrt{1 - \rho^2}} > \frac{1}{\lambda}$, ενώ το αντίστοιχο ποσοστό που επενδύεται στη δεύτερη αξία είναι αυξημένο όταν ικανοποιείται η $\rho - \sqrt{1 - \rho^2} > \lambda$. Αν συνδυάσουμε τις (4.25) και (4.24), μπορούμε να δούμε εύκολα ότι δεν είναι ποτέ δυνατό ταυτόχρονα να έχουμε:

$$\frac{1 - 2\rho\sqrt{1 - \rho^2}}{\rho - \sqrt{1 - \rho^2}} < \lambda < \rho - \sqrt{1 - \rho^2}. \quad (4.26)$$

Επομένως, τα δύο ποσοστά δεν είναι ποτέ δυνατό να αυξηθούν ταυτόχρονα συγκριτικά με την περίπτωση αποστροφής κινδύνου. Αν, λοιπόν, το κλάσμα του χαρτοφυλακίου που επενδύεται στην πρώτη αξία είναι αυξημένο σε σχέση με εκείνο του τύπου του Merton, αναγκαστικά το κλάσμα που αντιστοιχεί στην άλλη αξία πρέπει να είναι μειωμένο και αντίστροφα. Επιπλέον και τα δύο ποσοστά είναι μειωμένα συγκριτικά με τα ποσοστά που αντιστοιχούν στην περίπτωση της αποστροφής στον κίνδυνο, αν $\rho < \sqrt{2}/2$. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι η αποστροφή στην αβεβαιότητα οδηγεί σε αύξηση των επενδυόμενων

διαθεσίμων σε μία από τις δύο αξίες, όταν η τιμή του συντελεστή συσχέτισης είναι αρκετά υψηλή.

Η συνολική επίδραση που έχει η αποστροφή στην αβεβαιότητα στα συνολικά διαθέσιμα που επενδύονται και στις δύο αξίες, λαμβάνεται συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.24),(4.25) και δίνεται από την:

$$W\Delta w = W\Delta w_1 + W\Delta w_2 = \quad (4.27)$$

$$\kappa \frac{\alpha_1 - r}{\sigma_1} \frac{1}{\sigma_2} [(2\rho\sqrt{1-\rho^2} - 1)\sigma + \lambda\sigma(\rho - \sqrt{1-\rho^2}) + (\rho - \sqrt{1-\rho^2}) - \lambda] < 0 \quad \text{An}$$

$$(\lambda\sigma + 1)(\rho - \sqrt{1-\rho^2}) > \lambda + \sigma(1 - 2\rho\sqrt{1-\rho^2})$$

$$\hat{\lambda}(\rho - \sqrt{1-\rho^2} - \frac{1}{\sigma}) > \sigma(1 - 2\rho\sqrt{1-\rho^2}) - (\rho - \sqrt{1-\rho^2}) \quad (4.28)$$

$$\text{με } \hat{\lambda} = \frac{a_2 - r}{a_1 - r}, \quad \sigma = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

Αν η σχέση (5.47) ικανοποιείται, τότε τα συνολικά επενδύμενα διαθέσιμα είναι αυξημένα στην περίπτωση της αποστροφής στην αβεβαιότητα. Τα αποτελέσματα αυτά μπορούν να συνοψισθούν στην παρακάτω Πρόταση:

Πρόταση 4.1.1 *Με $\lambda, \hat{\lambda}, \sigma, \rho$, όπως ορίστηκαν παραπάνω, οι ευσταθείς κανόνες επιλογής χαρτοφυλακίου στην περίπτωση της αποστροφής στην αβεβαιότητα, για μία αγορά που αποτελείται από μία αξία όπου η επένδυση χαρακτηρίζεται από σταθερή απόδοση και δύο άλλες ως προς τις οποίες ο καταναλωτής είναι αβέβαιος ως προς την εξέλιξη της τιμής τους, επάγουν τα παρακάτω:*

1. Αν $\hat{\lambda} > \frac{\sigma^2(1-2\rho\sqrt{1-\rho^2})-\sigma(\rho-\sqrt{1-\rho^2})}{\sigma(\rho-\sqrt{1-\rho^2})-1}$, τότε υπάρχει μία αύξηση στα συνολικά επενδύμενα διαθέσιμα στις δύο αξίες που χαρακτηρίζονται από αβεβαιότητα σε σχέση με την περίπτωση της αποστροφής στον κίνδυνο ή $\Delta w < 0$.
2. Αν $\lambda > \frac{1-2\rho\sqrt{1-\rho^2}}{\rho-\sqrt{1-\rho^2}}$, τότε υπάρχει μία αύξηση στα συνολικά επενδύμενα διαθέσιμα στην πρώτη αξία που χαρακτηρίζονται από αβεβαιότητα, σε σχέση με την περίπτωση της αποστροφής στον κίνδυνο ή $\Delta w_1 < 0$.
3. Αν $\lambda < \rho - \sqrt{1-\rho^2}$, τότε υπάρχει μία αύξηση στα συνολικά επενδύμενα διαθέσιμα στη δεύτερη αξία που χαρακτηρίζονται από αβεβαιότητα, σε σχέση με την περίπτωση της αποστροφής στον κίνδυνο ή $\Delta w_2 < 0$.
4. Σε μία αύξηση του επενδύμενου ποσοστού στη μία αξία, οι ευσταθείς κανόνες επιλογής χαρτοφυλακίου επάγουν μείωση του επενδύμενου ποσοστού στην άλλη αξία που χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα.

5. Όταν η ανησυχία για την ευστάθεια του αρχικού μοντέλου αναφοράς δεν υπάρχει ή αλλιώς $\theta \rightarrow \infty$, τότε η διάφορα ανάμεσα στα ποσοστά που επάγει η αποστροφή στον κίνδυνο και εκείνα της αποστροφής στην αβεβαιότητα μηδενίζεται ή $\Delta w \rightarrow 0$, $(\Delta w_1, \Delta w_2) \rightarrow 0$.
6. Αν $\rho < \sqrt{2}/2$, τότε τα επενδύσιμα ποσοστά και στις δύο αξίες είναι μειωμένα σε σχέση με αυτά που δίνει η λύση του Merton.

Οι Εικόνες 3,4 παρέχουν τη γραφική παρουσίαση αυτών των αποτελεσμάτων. Στην Εικόνα 3, για κατάλληλες τιμές των παραμέτρων έτσι ώστε η τιμή του λ να είναι πάνω από την επιφάνεια $\phi(\sigma, \rho) = \frac{\sigma^2(1-2\rho\sqrt{1-\rho^2}) - \sigma(\rho - \sqrt{1-\rho^2})}{\sigma(\rho - \sqrt{1-\rho^2}) - 1}$, οι ευσταθείς κανόνες επιλογής χαρτοφυλακίου επάγουν μία αύξηση των συνολικών επενδύσιμων διαθέσιμων στις δύο αξίες που χαρακτηρίζονται από αβεβαιότητα. Στην Εικόνα 4, αν οι τιμές των παραμέτρων είναι τέτοιες ώστε η τιμή του λ να είναι πάνω από τη γραμμή $\psi(\rho) = \frac{1-2\rho\sqrt{1-\rho^2}}{\rho - \sqrt{1-\rho^2}}$, τότε οι ευσταθείς κανόνες επιλογής χαρτοφυλακίου επάγουν μία αύξηση των επενδύσιμων διαθέσιμων στην πρώτη αξία που συνοδεύεται από μείωση του ποσοστού στη δεύτερη και αντίστροφα.

[Εικόνα 3]

[Εικόνα 4]

4.1.1 Αριθμητικά αποτελέσματα για CRRA συνάρτηση χρησιμότητας

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.16), (4.11) στην εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού (4.10) παρέχοντας αρχικές τιμές για τις παραμέτρους οι οποίες εμφανίζονται στην εξίσωση (4.10), είμαστε σε θέση αρχικά να καθορίσουμε την παράμετρο Q και έπειτα την αντίστοιχη συνάρτηση αξίας. Τότε, τα βέλτιστα ευσταθή ποσοστά του χαρτοφυλακίου δίνονται για τις παρακάτω τιμές των παραμέτρων.

$$\begin{aligned} \delta &= 0.05 \quad \alpha_1 = 0.04 \quad \sigma_1 = 0.43 \quad r = 0.03 \\ \alpha_2 &= 0.05 \quad \sigma_2 = 0.66 \quad \rho = 0.93 \quad W = 100. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Οι επόμενες τέσσερις εικόνες παρουσιάζουν τη λύση για $\gamma = 0.5$. Η εικόνα 5 παρουσιάζει το βέλτιστο ποσοστό του χαρτοφυλακίου το οποίο επενδύεται στην πρώτη αξία w_1^* , όπου το αρνητικό πρόσημο αντιστοιχεί στην υπόθεση των ανοικτών πωλήσεων που είναι σε αντιστοιχία με το μοντέλο του Merton. Η επόμενη εικόνα 6, παρουσιάζει το βέλτιστο ευσταθές ποσοστό του χαρτοφυλακίου το οποίο επενδύεται στη δεύτερη αξία w_2^* , που καθώς βλέπουμε όσο η προτίμηση για ευστάθεια αυξάνει το ποσοστό του χαρτοφυλακίου μειώνεται. Έπειτα, παρουσιάζουμε το πώς τα συνολικά κεφάλαια που επενδύονται στις δύο

αυτές αξίες $w_1^* + w_2^*$ μεταβάλλονται καθώς η παράμετρος ευστάθειας μειώνεται και τέλος απεικονίζουμε την εξέλιξη του βέλτιστου ευσταθούς ποσού κατανάλωσης C^* , σαν συνάρτηση της παραμέτρου θ . Σε αυτή την ειδική περίπτωση είμαστε σε θέση, από την Εικόνα 7, να συμπεράνουμε ότι καθώς η τιμή της παραμέτρου ευστάθειας μειώνεται, το οποίο σημαίνει ότι η αξιοπιστία μας ως προς το αρχικό μοντέλο αναφοράς μειώνεται, τότε το συνολικό ποσοστό του χαρτοφυλακίου που επενδύεται στις δύο αξίες που εμπεριέχουν αβεβαιότητα μειώνεται επίσης. Αυτό το αποτέλεσμα έρχεται να επιβεβαιώσει τη γενική αντίληψη, ότι η αβεβαιότητα για το μοντέλο μας και η υιοθέτηση βέλτιστων ευσταθών κανόνων οδηγεί σε μία συνολικά συντηρητικότερη συμπεριφορά συγκριτικά με την περίπτωση αποστροφής στην αβεβαιότητα.

[Εικόνα 5]

[Εικόνα 6]

[Εικόνα 7]

[Εικόνα 8]

Στη συνέχεια, επαναλαμβάνουμε τους προηγούμενους υπολογισμούς διατηρώντας όλες τις τιμές των παραμέτρων ίδιες όπως και πριν με την μόνη διαφορά ότι η τυπική απόκλιση που αντιστοιχεί στη δεύτερη αξία έχει αυξηθεί από 0.66 σε 0.87 με το λόγο των δύο τυπικών αποκλίσεων να είναι τώρα περίπου 2. Σε αυτή την ειδική περίπτωση, η αποστροφή στην αβεβαιότητα επάγει μία αύξηση σε σχέση με την κλασική περίπτωση της αποστροφής στον κίνδυνο στην πρώτη αξία και όταν αυτό συμβαίνει το αντίστοιχο επενδύόμενο ποσοστό στη δεύτερη αξία μειώνεται, κάτι το οποίο φαίνεται από τις Εικόνες 9,10. Επιπλέον, από την Εικόνα 11, φαίνεται, όμως, ότι το συνολικό ποσοστό του χαρτοφυλακίου που επενδύεται στις δύο αυτές αξίες αυξάνει, καθώς η τιμή της παραμέτρου ευστάθειας μειώνεται, το οποίο πρακτικά σημαίνει ότι τώρα μία αύξηση της αβεβαιότητας που συνδέεται με το αρχικό μοντέλο αναφοράς, επάγει μία αύξηση των επενδυόμενων ποσοστών συγκριτικά με την περίπτωση του *Merton*. Αυτό το αποτέλεσμα δε βρίσκεται σε αντιστοιχία με τη γενική αντίληψη σύμφωνα με την οποία η αποστροφή στην αβεβαιότητα οδηγεί σε συντηρητικότερη συμπεριφορά.

[Εικόνα 9]

[Εικόνα 10]

[Εικόνα 11]

[Εικόνα 12]

Αυτό το αποτέλεσμα, έπεται από το γεγονός ότι επειδή η τυπική απόκλιση που αντιστοιχεί στη δεύτερη αξία είναι επαρκώς υψηλότερη από αυτή που αντιστοιχεί στη πρώτη, λόγω του ότι οι αποδόσεις κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση εξαιτίας του υψηλού συντελεστή συσχέτισης, ο επενδύτης: Αυξάνει τα διαθέσιμα στην πρώτη αξία και μειώνει τα αντίστοιχα διαθέσιμα στην άλλη αξία, σαν μία προσπάθεια να εξισορροπήσει την επίδραση μίας κακιάς κατανομής.

Φαίνεται, λοιπόν, ότι η διαφορά στις τυπικές αποκλίσεις είναι αυτή που οδηγεί σε συγκριτικά αύξηση των επενδύμενων διαθεσίμων στην πρώτη αξία, έτσι ώστε το συνολικό αποτέλεσμα να είναι μία αύξηση των συνολικών επενδύμενων κεφαλαίων, καθώς η αβεβαιότητα αυξάνει, ένα αποτέλεσμα που προφανώς δεν είναι σε αντιστοιχία με την υιοθέτηση συντηρητικότερων συμπεριφορών.

4.2 Διαφορετικά επίπεδα αβεβαιότητας μεταξύ των αξιών

Σε αυτό το κεφάλαιο γενικεύουμε το μοντέλο μας επιτρέποντας διαφορετικά επίπεδα αβεβαιότητας ανάμεσα στις διάφορες αξίες. Αυτά τα διαφορετικά επίπεδα αβεβαιότητας, μπορούν σε αυτή την περίπτωση να αποτυπωθούν σαν διαφορές στα επίπεδα της αβεβαιότητας που σχετίζονται με τη διαδικασία που περιγράφει την εξέλιξη της τιμής κάθε μίας εξ αυτών. Σε αντιδιαστολή, λοιπόν, με τα προηγούμενα μοντέλα όπου είχαμε θεωρήσει ότι η αβεβαιότητα οφείλεται σε γενικούς μακροοικονομικούς παράγοντες σχετιζόμενους με την εξέλιξη της οικονομίας και όπου είχαμε θεωρήσει ίδιους όρους διαταραχής, τώρα θεωρούμε ότι η αβεβαιότητα καθορίζεται από παράγοντες που σχετίζονται με το μικρόκοσμο κάθε μίας αξίας (εταιρίας) χωριστά, όποτε σε αυτή την περίπτωση επιλέγουμε διαφορετικούς όρους διαταραχής.¹²

Ακολουθώντας τη μεθοδολογία του βέλτιστου ευσταθούς ελέγχου όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις λύνουμε το ίδιο πρόβλημα μεγιστοποίησης άπειρου χρονικού ορίζοντα στην περίπτωση n αξιών που εμπεριέχουν κίνδυνο:

$$\max_{w_i, C} \mathbb{E}_0 \int_0^{\infty} e^{-\delta t} U(C) dt, \quad (4.30)$$

θεωρώντας, τώρα, n διαφορετικούς όρους h_i , $i = 1, \dots, n$ και n διαφορετικές παραμέτρους ευσταθείας θ_i μία για κάθε αξία ξεχωριστά. Τα αποτελέσματα σε αυτό το γενικευμένο μοντέλο, τα οποία αναφέρονται στις μεταβολές των επενδύμενων ποσοστών του χαρτοφυλακίου στην περίπτωση της αποστροφής στην αβεβαιότητα σε σχέση με την αποστροφή στον κίνδυνο, μπορούν να περιγραφούν από την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 4.2.1 *Οι ευσταθείς κανόνες επιλογής χαρτοφυλακίου επάγουν για μία αγορά που αποτελείται από μία αξία σταθερής απόδοσης και περισσότερες αξίες με διαφορετικά επίπεδα αβεβαιότητας, ως προς την εξέλιξη των τιμών τους, τα παρακάτω:*

1. Η μεταβολή του χαρτοφυλακίου που επενδύεται σε κάθε μία από τις αξίες, ανάμεσα στην περίπτωση της αποστροφής στον κίνδυνο και εκείνης όπου αποστρεφόμεστε την αβεβαιότητα, δίνεται από την:

$$W \Delta w_i = \sum_{j=1}^n [\Sigma^{-1} (\Pi^{-1} - \hat{D}^{-1}) \Sigma^{-1}]_{ij} (\alpha_j - r), \quad i = 1, \dots, n.$$

¹²Οι Uppal and Wang [73] αναπτύσσουν μία μεθοδολογία η οποία μας επιτρέπει να θεωρήσουμε αβεβαιότητα ως προς την από κοινού κατανομή των αξιών του χαρτοφυλακίου και επίσης να θεωρήσουμε διαφορετικά επίπεδα αβεβαιότητας για την περιθώρια κατανομή κάθε ενός συνόλου εξ αυτών.

2. Η συνολική μεταβολή του χαρτοφυλακίου που επενδύεται σε όλες τις αξίες, ανάμεσα στην περίπτωση της αποστροφής στον κίνδυνο και εκείνης όπου αποστρεφόμεστε την αβεβαιότητα, δίνεται από την:

$$W\Delta w = \sum_{i=1}^n \Delta w_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\Sigma^{-1}(\Pi^{-1} - \hat{D}^{-1})\Sigma^{-1}]_{ij}(\alpha_j - r), \text{ με}$$

$$\hat{D}_{ij} = \left(\rho_{ij} - \frac{V_{iW}^2}{V_{WW}} \sum_{\kappa=1}^n \frac{R_{i\kappa}R_{j\kappa}}{\theta_{\kappa}}\right).$$

Η απόδειξη της παραπάνω Πρότασης δίνεται στο παράρτημα.

Αν συγκρίνουμε το παραπάνω αποτέλεσμα με εκείνο που αντιστοιχεί σε ίδια επίπεδα αβεβαιότητας, βλέπουμε ότι η μόνη διαφορά είναι ότι ο πίνακας D έχει αντικατασταθεί από τον \hat{D} , το οποίο αντικατοπτρίζει την ετερογένεια στις παραμέτρους ευστάθειας.

4.2.1 Η ειδική περίπτωση δύο αξιών που εμπεριέχουν αβεβαιότητα

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα παρουσιάσουμε την ειδική περίπτωση δύο αξιών που εμπεριέχουν αβεβαιότητα, το οποίο σημαίνει ότι στην απόδειξη μας υιοθετούμε διαφορετικούς όρους h_1, h_2 και παραμέτρους ευστάθειας θ_1, θ_2 . Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο, τα αποτελέσματα μας είναι δυνατόν να συνοψιστούν στη παρακάτω Πρόταση.

Πρόταση 4.2.2 Οι ευσταθείς κανόνες κατανομής χαρτοφυλακίου επάγουν για μία αγορά που αποτελείται από μία αξία σταθερής απόδοσης και δύο αξίες με διαφορετικά επίπεδα αβεβαιότητας ως προς την εξέλιξη των τιμών τους τα παρακάτω:

1. $W\Delta w_1 = \frac{\kappa}{\sigma_1} \left[\frac{\alpha_1 - r}{\sigma_1} \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_2} \frac{1 - \rho^2}{1 - \frac{V_{iW}^2}{V_{WW}}} - 1 \right) + \frac{\alpha_2 - r}{\sigma_2} \rho \right] < 0$, Αν $\frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_2} \mu > \frac{1 - \rho\lambda}{1 - \rho^2}$
- $W\Delta w_2 = \frac{\kappa}{\sigma_2} \left[\frac{\alpha_1 - r}{\sigma_1} \rho - \frac{\alpha_2 - r}{\sigma_2} \right] < 0$, Αν $\rho > \lambda$
2. Αν $\theta_1 < 2\theta_2$ τότε ποτέ δεν αυξάνουμε τα επενδύσιμα διαθέσιμα ταυτόχρονα και στις δύο αξίες σε σχέση με την περίπτωση της αποστροφής κινδύνου.
3. $W\Delta w < 0$, Αν $\rho\lambda\sigma + \rho - \lambda = \hat{\lambda} \left(\rho - \frac{1}{\sigma} \right) + \rho > \sigma \left[1 - \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_2} \mu (1 - \rho^2) \right]$

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{V_{iW}^2}{V_{WW}}}, \quad \sigma = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad \lambda = \frac{\frac{\alpha_2 - r}{\sigma_2}}{\frac{\alpha_1 - r}{\sigma_1}}, \quad \hat{\lambda} = \frac{\alpha_2 - r}{\alpha_1 - r}$$

Η απόδειξη της παραπάνω Πρότασης δίνεται στο παράρτημα

Από την πρώτη συνθήκη της παραπάνω πρότασης συμπεραίνουμε ότι όταν η προτίμηση για έλεγχο της ευστάθειας είναι αρκετά μικρή ή διαφορετικά η ανησυχία για το πόσο καλά αντικατοπτρίζει το μοντέλο μας την εξέλιξη των

τιμών για την πρώτη αξία είναι μικρή, ενώ η αβεβαιότητα μας ως προς την εξέλιξη της τιμής της άλλης αξίας είναι μεγάλη, τότε είναι πολύ πιθανό ότι τα επενδυόμενα διαθέσιμα στην πρώτη αξία θα αυξηθούν, λαμβάνοντας υπόψη μας την αποστροφή στην αβεβαιότητα. Αν συσχετίσουμε την πρώτη αξία, με κάποια αξία που διαπραγματεύεται στην εγχώρια αγορά γνωστή προς εμάς και τη δεύτερη με κάποια αξία που αναφέρεται σε μία διεθνή αγορά, τότε το αποτέλεσμα αυτό παρέχει μία άλλη εξήγηση για το «home bias puzzle». Οι Uppal and Wang [73], αποδεικνύουν ένα παρόμοιο αποτέλεσμα που σχετίζεται με το «home bias puzzle». Αυτοί, όμως, κάνουν χρήση μίας κανονικοποίησης η οποία ενδογενοποιεί την παράμετρο ευστάθειας και με τον τρόπο αυτό σπάει ο σύνδεσμος με την αξιωματική θεμελίωση της αποστροφής στην αβεβαιότητα των Gilboa-Schmeidler. Ο Pathak [59], επίσης δίνει μία εξήγηση για το παραπάνω παράδοξο χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο δύο αξιών και την «κ - ignorance» μεθοδολογία, όπου το χειρότερο σενάριο χρησιμοποιείται για να προκαλέσουμε μείωση στη μέση απόδοση των αξιών. Υπάρχει μία σημαντική διαφορά ανάμεσα στη μεθοδολογία του robust control και εκείνη της «κ - ignorance», που υιοθετεί το χειρότερο σενάριο. Σε αυτή την περίπτωση η μείωση στη μέση απόδοση καθορίζεται στο επίπεδο εκείνο όπου ο περιορισμός εντροπίας $Q(\tau) = \{Q \in \mathcal{Q} : R_t(Q \parallel \mathcal{P}) \leq \tau \ \forall t\}$ ικανοποιείται. Στη μεθοδολογία του βέλτιστου ευσταθούς ελέγχου που αναπτύσσεται εδώ, η παράμετρος ευστάθειας που συσχετίζεται με τα h_i είναι ο πολλαπλασιαστής *Lagrange* που σχετίζεται με τη συνθήκη εντροπίας. Στο στοχαστικό διαφορικό παίγνιο μεταξύ των δύο παικτών, ο εχθρικός παίκτης, δηλαδή η φύση που περιγράφεται από τη σχέση (3.9) επιλέγει τον όρο \mathbf{h} ο οποίος μειώνει τη μέση απόδοση, όχι απαραίτητα βάσει του περιορισμού εντροπίας αλλά επιλέγεται με ένα τρόπο μεγιστοποίησης όπως φαίνεται και από την (11.5) στο Παράρτημα στην απόδειξη της Πρότασης. Επομένως, το αποτέλεσμα που παρουσιάζεται εδώ μπορεί να θεωρηθεί σαν μία διαφορετική εξήγηση για το παραπάνω παράδοξο, χρησιμοποιώντας μία διαφορετική προσέγγιση στην αποστροφή στην αβεβαιότητα. Επίσης μιας και τα διαθέσιμα που επενδύονται σε κάθε αξία εξαρτιόνται από τις τιμές των θ_a , αυτή η προσέγγιση συσχετίζει την έκταση του παράδοξου με τα διαφορετικά επίπεδα αβεβαιότητας ανάμεσα στις διάφορες αξίες.

Στο κεφάλαιο αυτό, θεωρώντας ένα σταθερό σύνολο επενδυτικών επιλογών αποδείξαμε συνθήκες η ικανοποίηση των οποίων οδηγεί σε επιθετικότερη συμπεριφορά σε σχέση με το κλασσικό οικονομικό περιβάλλον και δώσαμε μία εξήγηση για το «home bias puzzle». Αυτή η επιθετικότερη συμπεριφορά είναι η πρώτη φορά η οποία από όσο γνωρίζουμε εμφανίζεται σε προβλήματα βέλτιστης επιλογής χαρτοφυλακίου.

Έπειτα στο κεφάλαιο που ακολουθεί αυξάνουμε την πολυπλοκότητα του μοντέλου μας θεωρώντας στοχαστικό σύνολο επενδυτικών επιλογών.

5 Στοχαστικό σύνολο επενδυτικών επιλογών

Εδώ μοντελοποιούμε ξανά τις κινήσεις των αξιών με τη χρήση γεωμετρικών κινήσεων *Brown*, όπου τώρα για τη μέση αναμενόμενη τιμή και την τυπική απόκλιση δεν θεωρούμε ότι είναι σταθερές αλλά ότι και αυτές ακολουθούν μία ανάλογη στοχαστική διαδικασία. Αρχικά, λύνουμε το πρόβλημα με μία αξία σταθερής απόδοσης και μία που χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα και αποδεικνύουμε συνθήκες, η ικανοποίηση των οποίων ποτέ δεν οδηγεί σε επιθετικότερη συμπεριφορά συγκριτικά με την περίπτωση της αποστροφής στον κίνδυνο. Έπειτα, προσθέτουμε μία επιπλέον αξία και λύνουμε το πρόβλημα τόσο με ίδια όσο και διαφορετικά επίπεδα αβεβαιότητας μεταξύ των δύο αξιών. Δείχνουμε, δε, ότι και εδώ αναφορικά με την πρώτη περίπτωση είναι εφικτή μία επιθετικότερη συμπεριφορά στην περίπτωση διαφορετικών επιπέδων αβεβαιότητας μεταξύ των δύο αξιών. Επιπλέον, όταν έχουμε δύο αξίες όπου ως προς τη μία αποστρεφόμεστε τον κίνδυνο και ως προς την άλλη αποστρεφόμεστε την αβεβαιότητα, δείχνουμε ότι είναι πιο πιθανό να αυξήσουμε τα διαθέσιμα μας στην πρώτη εκ των δύο αξιών συγκρινόμενα με αυτά που δίνει η λύση του *Merton* και δίνουμε έτσι με τον τρόπο αυτό μία διαφορετική ερμηνεία για το «*home bias puzzle*».

5.1 Ίδια επίπεδα αβεβαιότητας μεταξύ των αξιών.

Στο υποκεφάλαιο αυτό, όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο όπου αναλύσαμε την περίπτωση μη στοχαστικού συνόλου επενδυτικών επιλογών, θεωρούμε αρχικά ότι η αβεβαιότητα οφείλεται σε γενικούς μακροοικονομικούς παράγοντες σχετιζόμενους με την εξέλιξη της οικονομίας όπως για παράδειγμα ο πληθωρισμός και το έλλειμμα εισαγωγών εξαγωγών, οπότε θεωρούμε ίδιους όρους διαταραχής που αντικατοπτρίζεται σε ίδια επίπεδα αβεβαιότητας μεταξύ των αξιών.

5.1.1 Ευσταθείς κανόνες κατανομής χαρτοφυλακίου με μία αξία που χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα.

Θεωρούμε ότι η αγορά αποτελείται από μία αξία που χαρακτηρίζεται από σταθερή απόδοση και ακολουθεί την:

$$dS(t) = rS(t)dt \quad S(0) = S_0, \quad t \geq 0,$$

με r να συμβολίζουμε το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο. Όπως σε προηγούμενο κεφάλαιο, έστω ότι α_1 η μέση αναμενόμενη απόδοση και σ_1 η τυπική απόκλιση μίας αξίας που χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα και που η εξέλιξη της τιμής της, P_1 περιγράφεται από την:

$$\frac{dP_1}{P_1} = \alpha_1 dt + \sigma_1 dB_1, \quad (5.1)$$

όπου B_1 είναι μία μονοδιάστατη κίνηση *Brown* ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}) , με μέτρο \mathcal{P}_1 . Θεωρούμε επίσης, αρχικά, ότι η μέση αναμενόμενη απόδοση κινείται στοχαστικά στο χρόνο και ότι ικανοποιεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση.

$$\frac{d\alpha_1}{\alpha_1} = f_1 dt + g_1 dZ_1, \quad (5.2)$$

με f_1, g_1 , να είναι σταθερές και Z_1 μία άλλη *Brownian* κίνηση, η οποία είναι σε συσχέτιση με την B_1 . Έστω, ότι με ρ_1 συμβολίζουμε το συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των δύο παραπάνω στοχαστικών διαδικασιών.¹³ ¹⁴ Η λύση του *Merton*¹⁵ για το πρόβλημα της βέλτιστης επιλογής χαρτοφυλακίου στο πρόβλημα του άπειρου χρονικού ορίζοντα, μας δίνει το βέλτιστο ευσταθές ποσοστό w_1 , του χαρτοφυλακίου W το οποίο κατανέμεται στην αξία που χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα από την:

$$w_1 W = \frac{A(\alpha_1 - r)}{\sigma_1^2} + H_1 \frac{g_1 \rho \alpha_1}{\sigma_1} \quad (5.3)$$

$$A = -\frac{V_W}{V_{WW}} \quad (5.4)$$

$$H_1 = -\frac{V_{\alpha_1 W}}{V_{WW}} \quad (5.5)$$

όπου V είναι η συνάρτηση αξίας του προβλήματος, V_W, V_{WW} η πρώτη και δεύτερης τάξης μερική παράγωγο αναφορικά με το επίπεδο του χαρτοφυλακίου W και $V_{W\alpha_1}$ είναι η μερική παράγωγος ως προς W και α_1 .

Γράφοντας την dZ_1 σαν $\rho dB_1 + \sqrt{1 - \rho^2} dB_2$ η εξίσωση (5.2) γίνεται:

$$\frac{d\alpha_1}{\alpha_1} = f_1 dt + g_1 (\rho dB_1 + \sqrt{1 - \rho^2} dB_2), \quad (5.6)$$

με B_1, B_2 να είναι δύο ανεξάρτητες κινήσεις *Brown* ορισμένες σε ένα χώρο (Ω, \mathcal{F}) , με μέτρο $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$.

Ακολουθώντας τη μεθοδολογία που περιγράψαμε και εφαρμόσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, το μοντέλο (5.1), (5.6) θεωρείται σαν το μοντέλο αναφοράς μας. Η ανησυχία για την ευστάθεια του μοντέλου μας, αντικατοπτρίζεται από ένα σύνολο στοχαστικών διαταραχών. Επειδή οι κινήσεις *Brown* είναι ανεξάρτητες διαταράσσουμε κάθε μία ξεχωριστά και έχουμε.

$$B_i(t) = \hat{B}_i(t) + \int_0^t h_i(s) ds, \quad i = 1, 2, \quad (5.7)$$

¹³ $\mathbb{E} dB_1 dZ_1 = \rho dt$

¹⁴ Ακολουθώντας τον *Merton* αποδεικνύουμε τα αποτελέσματα μας θεωρώντας ότι το α_1 κινείται βάσει της παραπάνω γενικής εξίσωσης. Τα αποτελέσματα επίσης ισχύουν και για την περισσότερο ρεαλιστική εξίσωση $d\alpha_1 = (\alpha_1 f_1 - f_2) dt + \alpha_1 g_1 dZ_1$. Για να μοντελοποιήσουμε μία τέτοια διαδικασία το μόνο πράγμα που χρειάζεται είναι να προσθέσουμε στις αποδείξεις μας ένα διορθωτικό όρο που σχετίζεται με το f_2 , κάτι που δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα μας. Το ίδιο ισχύει και για τη περίπτωση στοχαστικής τυπικής απόκλισης.

¹⁵ Βλέπε [53], [54]

όπου $\{\hat{B}_i(t) : t \geq 0\}$, *Brownian* κινήσεις και $\{h_i(t) : t \geq 0\}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Επομένως, οι πιθανότητες που επάγονται από τις (5.1), (5.6) διαταράσσονται. Το μέτρο \mathcal{P} αντικαθίσταται από ένα άλλο μέτρο πιθανότητας $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \otimes \mathcal{Q}_2$. Βάσει της θεωρίας του ευσταθούς ελέγχου, η σχετική εντροπία δίνεται από την:

$$R(\mathcal{Q} \parallel \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^2 \int_0^\infty e^{-\delta u} \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \left(\frac{h_i^2}{2} \right) du. \quad (5.8)$$

με τον περιορισμό εντροπίας τώρα να γίνεται

$$\mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \int_0^\infty e^{-\delta u} \frac{1}{2} (h_1^2 + h_2^2) du \leq \nu \quad (5.9)$$

όπου ν είναι η παράμετρος που καθορίζει το μέγεθος της εντροπίας, δηλαδή το πόσο είμαστε αποφασισμένοι να απομακρυνθούμε από το μοντέλο αναφοράς. Κάθε ένας από τους όρους διαταραχής σχετίζεται με την εξέλιξη ως προς την τιμή κάθε αξίας, καθώς επίσης και με την εξέλιξη της μέσης αναμενόμενης τιμής. Υποθέτοντας, λοιπόν εδώ, ότι η αβεβαιότητα σχετίζεται με την εξέλιξη των γενικών μακροοικονομικών παραγόντων, αυτό έχει σαν αποτέλεσμα αυτή να επιδρά κατά τον ίδιο τρόπο στις δύο εμφανιζόμενες στοχαστικές διαδικασίες. Κάτω από αυτή την υπόθεση, η αβεβαιότητα είναι δομημένη βάσει του περιορισμού:

$$h_1 = h_2 = h \quad (5.10)$$

Θεωρώντας, λοιπόν, συμμετρικώς διαταραγμένα μέτρα $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$ και εξετάζοντας την περίπτωση με ίδιους όρους h_i , η εξίσωση για την εξέλιξη του χαρτοφυλακίου και αυτή της μέσης αναμενόμενης απόδοσης γίνεται:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} d\alpha_1(t) \\ dW(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha_1[f_1 + g_1 h(\rho + \sqrt{1 - \rho^2})] \\ Ww_1(\alpha_1 + \sigma_1 h - r) + (rW - c) \end{bmatrix} dt \\ &+ \begin{bmatrix} \alpha_1 g_1 \rho & \alpha_1 g_1 \sqrt{1 - \rho^2} \\ W\sigma_1 w_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\hat{B}_1 \\ d\hat{B}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Σε αυτή την περίπτωση η ανησυχία για την ευστάθεια του μοντέλου μας, αναφορικά με το πρόβλημα της μεγιστοποίησης της ωφελιμότητας

$$\max_{w_1, C} \mathbb{E}_0 \int_0^\infty e^{-\delta t} U(C) dt \quad (5.12)$$

οδηγεί στο πολλαπλασιαστικό πρόβλημα ευσταθούς ελέγχου, που ορίζεται σε αυτή την περίπτωση, ως:

$$J(\theta) = \sup_{w_1, C} \inf_h \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \int_0^\infty e^{-\delta t} \left[U(C) + \theta_2 \frac{h^2}{2} \right] dt \quad (5.13)$$

μ.π. (5.11).

Σε αυτή, λοιπόν, την περίπτωση προσαρμόζοντας τη μεθοδολογία στις απαιτήσεις του προβλήματος, η *Bellman – Isaacs* συνθήκη για τη συνάρτηση $V(W, \alpha_1, \theta)$ γίνεται:

$$\begin{aligned} \delta V = \max_{w_1, C} \min_h & \left\{ U(C) + \theta_2 \frac{h^2}{2} + V_W [w_1(\alpha_1 + \sigma_1 h - r)W + (rW - c)] \right. \\ & + V_{\alpha_1} \alpha_1 [f_1 + g_1 h(\rho + \sqrt{1 - \rho^2})] + \alpha_1 g_1 \rho W \sigma_1 w_1 V_{\alpha_1 W} + \\ & \left. \frac{1}{2} V_{WW} \sigma_1^2 w_1^2 W^2 + \frac{1}{2} V_{\alpha_1 \alpha_1} \alpha_1^2 g_1^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Με τις συνθήκες πρώτης τάξης να είναι:

$$U'(C) = V_W, \quad (5.15)$$

$$h = - \frac{V_W W w_1 \sigma_1 + V_{\alpha_1} \alpha_1 g_1 (\rho + \sqrt{1 - \rho^2})}{\theta_2}, \quad (5.16)$$

$$0 = V_W w_1 (\alpha_1 + \sigma_1 h - r) + V_{WW} \sigma_1^2 W w_1 + \alpha_1 g_1 \rho \sigma_1 V_{\alpha_1 W} \quad (5.17)$$

Από το παραπάνω σύστημα των εξισώσεων μπορεί να δείχνει ότι καθώς $\theta \rightarrow \infty$ η λύση είναι ίδια με αυτή που δίνει το μοντέλο του *Merton*. Κάνοντας χρήση της (5.16) για να εξαλείψουμε το h από την (5.17), λαμβάνουμε το βέλτιστο ευσταθές ποσοστό του χαρτοφυλακίου το οποίο επενδύεται στην αξία όπου χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα.

$$w_1^* W \left(1 - \frac{V_W^2}{\theta_2 V_{WW}} \right) = \frac{A(\alpha_1 - r)}{\sigma_1^2} + H_1 \frac{g_1 \rho \alpha_1}{\sigma_1} + \frac{V_W V_{\alpha_1}}{\theta_2 V_{WW}} \frac{g_1 \alpha_1}{\sigma_1} (\rho + \sqrt{1 - \rho^2}) \quad (5.18)$$

όπου στην παραπάνω εξίσωση: $A = -\frac{V_W}{V_{WW}}$, $H_1 = -\frac{V_{\alpha_1 W}}{V_{WW}}$.

Για να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα αναφορικά με τη μεταβολή του χαρτοφυλακίου ανάμεσα στην περίπτωση της αποστροφής στον κίνδυνο και εκείνης στην αβεβαιότητα, συγκρίνουμε τις σχέσεις (5.3) και (5.18). Από τη σύγκριση συμπεραίνουμε ότι: Ο όρος μέσα στις παρενθέσεις στο αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης είναι πάντοτε ένας αριθμός μεγαλύτερος του ένα. Επιπλέον, οι δύο πρώτοι όροι είναι ίδιοι με αυτούς της εξίσωσης του *Merton*

(5.3). Επομένως όταν: $V_{\alpha_1} < 0$ αν $\rho + \sqrt{1 - \rho^2} < 0$ το οποίο σημαίνει ότι

$V_{\alpha_1} > 0$ αν $\rho + \sqrt{1 - \rho^2} > 0$ αν $(\rho + \sqrt{1 - \rho^2} < 0, V_{\alpha_1} < 0)$ ή $(\rho + \sqrt{1 - \rho^2} > 0, V_{\alpha_1} > 0)$ λαμβάνουν χώρα την ίδια στιγμή, τότε $w_1^* W$ είναι μικρότερο από το $w_1 W$ και επομένως ένας επενδυτής ο οποίος αποστρέφεται την αβεβαιότητα μειώνει τα επενδύσιμα διαθέσιμα στην παραπάνω αξία, σε σχέση με εκείνα της περίπτωσης αποστροφής στον κίνδυνο.

Υποθέτουμε, παρακάτω, ότι η μέση αναμενόμενη απόδοση είναι σταθερή και ότι ο καταναλωτής αποστρέφεται την αβεβαιότητα που οφείλεται στη στοχαστική εξέλιξη της τυπικής απόκλισης.

$$\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = f_2 dt + g_2 dZ_2, \quad (5.19)$$

όπου f_2, g_2 σταθερές και Z_2 , *Brownian* κίνηση. Αν ρ αναφέρεται στο συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των dZ_2, dB_1 , τότε ακολουθώντας την προηγούμενη προσέγγιση λαμβάνουμε την παρακάτω Πρόταση.

Πρόταση 5.1.1 Σε μία αγορά που αποτελείται από μία αξία σταθερής απόδοσης και μία άλλη με αβέβαιη απόδοση, όπου ο επενδύτης αποστρέφεται την αβεβαιότητα η οποία οφείλεται σε γενικούς μακροοικονομικούς παράγοντες και η οποία σχετίζεται (i) με την εξέλιξη της τιμής της αξίας (ii) με την εξέλιξη της τιμής της μέσης αναμενόμενης απόδοσης είτε της τυπικής απόκλισης, τότε θα υπάρχει ένα χωρίο του χώρου καταστάσεων το οποίο καθορίζεται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} \rho + \sqrt{1 - \rho^2} < 0 & \text{ όταν } V_{\alpha_1} < 0 \text{ ή } V_{\sigma_1} < 0 \\ \rho + \sqrt{1 - \rho^2} > 0 & \text{ όταν } V_{\alpha_1} > 0 \text{ ή } V_{\sigma_1} > 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

όπου ο επενδύτης μειώνει τα διαθέσιμα στην αξία με αβέβαιη απόδοση συγκριτικά με την κλασική περίπτωση του *Merton*. Για το υπόλοιπο του χώρου καταστάσεων η μεταβολή δεν μπορεί να καθοριστεί αναλυτικά.

Το παραπάνω αποτέλεσμα εξαρτάται από το πρόσημο των παραγώγων της συνάρτησης σε σχέση με τη μέση αναμενόμενη τιμή και την τυπική απόκλιση καθώς επίσης και της τιμής του r . Στην περίπτωση όπου αυτοί οι παράμετροι που επηρεάζουν την κίνηση *Brown*, είναι σταθεροί αριθμοί, δηλαδή $f_i = g_i = 0, i = 1, 2$, αύξηση της επιθυμίας για έλεγχο της ευσταθείας του μοντέλου μας, πάντοτε επάγει συντηρητικότερη συμπεριφορά, σε σχέση με την περίπτωση της αποστροφής στον κίνδυνο. Σε αυτή την περίπτωση ο επενδύτης τείνει να μειώσει τα επενδύσιμα διαθέσιμα, κάτι το οποίο βλέπει κανείς θέτοντας $g_i = 0$ στην (5.18) και κάνοντας την ίδια σύγκριση όπως παραπάνω. Αυτό είναι το συνηθισμένο αποτέλεσμα το οποίο σχετίζεται με την αποστροφή στην αβεβαιότητα και τη χρήση μεθόδων ευσταθούς ελέγχου. Παρόλα αυτά όμως το αποτέλεσμα αυτό δε μεταφέρεται στη γενικότερη περίπτωση με στοχαστικό σύνολο επενδυτικών επιλογών. Στην περίπτωση αυτή το αποτέλεσμα εξαρτάται από το συντελεστή συσχέτισης και ειδικότερα από το πρόσημο του όρου $\rho + \sqrt{1 - \rho^2}$, σε συνδυασμό με τις μερικές παραγωγούς. Άρα, το γενικό αποτέλεσμα δεν ισχύει πάντοτε σε αυτή την περίπτωση. Ίσως, δε, με χρήση αριθμητικών μεθόδων για την επίλυση σε συγκεκριμένες περιπτώσεις να έχουμε και αντιστροφή των αποτελεσμάτων και επομένως της συμπεριφοράς του επενδυτή.

5.1.2 Η περίπτωση στοχαστικής μέσης απόδοσης και τυπικής απόκλισης

Σε αυτό το υποκεφάλαιο εξετάζουμε την περίπτωση όπου ο επενδύτης αποστρέφεται την αβεβαιότητα που οφείλεται στη στοχαστική κίνηση τόσο της αναμενόμενης μέσης τιμής όσο και της τυπικής απόκλισης. Αν B_1, B_2, B_3

ανεξάρτητες *Brownian* κινήσεις και αν με ρ_1, ρ_2, ρ_3 , συμβολίσουμε τους συντελεστές συσχέτισης ανάμεσα στα ζεύγη (dB_1, dZ_1) , (dB_1, dZ_2) , και (dZ_1, dZ_2) αντίστοιχα, και ορίσουμε το παρακάτω σύστημα των ανισοτήτων

$$S = \begin{cases} \rho_2 + \tau_1 + \tau_2 < (>)0 \text{ όταν } V_{\sigma_1} < (>)0 \text{ αντίστοιχα} \\ \rho_1 + \sqrt{1 - \rho_1^2} > (<)0 \text{ όταν } V_{\alpha_1} > (<)0 \text{ αντίστοιχα} \\ (1 - \rho_2^2)(1 - \rho_1^2) - (\rho_3 - \rho_1\rho_2)^2 > 0 \\ 1 \leq \rho_2 \leq 1 \\ -1 \leq \rho_3 \leq 1 \end{cases} \quad (5.21)$$

με $\tau_1 = \frac{\rho_3 - \rho_1\rho_2}{\sqrt{1 - \rho_1^2}}$, $\tau_2 = \sqrt{1 - \rho_2^2 - \tau_1^2}$, το οποίο σημαίνει ότι όταν μία από τις $(\rho_2 + \tau_1 + \tau_2 > 0, V_{\sigma_1} > 0)$ ή $(\rho_2 + \tau_1 + \tau_2 < 0, V_{\sigma_1} < 0)$ ισχύει με μία από τις παρακάτω σχέσεις $(\rho_1 + \sqrt{1 - \rho_1^2} > 0, V_{\alpha_1} > 0)$, $(\rho_1 + \sqrt{1 - \rho_1^2} < 0, V_{\alpha_1} < 0)$, και μαζί με τις τελευταίες τρεις ανισότητες, τότε μπορούμε να διατυπώσουμε την παρακάτω Πρόταση.

Πρόταση 5.1.2 *Αν ισχύουν οι ίδιες υποθέσεις με την παραπάνω Πρόταση και το σύστημα των ανισοτήτων S ικανοποιείται, τότε αυτό καθορίζει ένα χωριό όπου ένας επενδύτης ο οποίος αποστρέφεται την αβεβαιότητα γίνεται συντηρητικότερος, δηλαδή μειώνει τα επενδυόμενα διαθέσιμα στην αξία όπου δεν χαρακτηρίζεται από σταθερή απόδοση, σε σχέση με την περίπτωση της αποστροφής στον κίνδυνο.*

Η απόδειξη της Πρότασης στο Παράρτημα.

Αν το παραπάνω σύστημα των ανισοτήτων δεν ικανοποιείται, δεν είμαστε σε θέση να καθορίσουμε την κατεύθυνση της μεταβολής των επενδυόμενων διαθεσίμων.

5.1.3 Δύο αξίες που εμπεριέχουν αβεβαιότητα

Έστω, ότι η αγορά αποτελείται από μία αξία σταθερής απόδοσης και δύο αξίες που εμπεριέχουν αβεβαιότητα. Η εξίσωση (5.1) μαζί με την:

$$\frac{dP_2}{P_2} = \alpha_2 dt + \sigma_2 dB_2, \quad (5.22)$$

εκφράζει την εξέλιξη της τιμής των δύο αξιών, ενώ η σχέση (5.2) αναφέρεται στην εξέλιξη της παραμέτρου που περιγράφει τη μέση αναμενόμενη τιμή της πρώτης αξίας. Όλες οι άλλοι παράμετροι που εμφανίζονται παραπάνω, έστω ότι είναι σταθερές και επίσης ότι οι τρεις *Brownian* κινήσεις είναι συσχετισμένες όπου με ρ_1, ρ_2, ρ_3 οι αντίστοιχοι συντελεστές συσχέτισης μεταξύ των ζευγών (dB_1, dB_2) , (dB_1, dZ_1) , και (dB_2, dZ_1) . Η λύση του *Merton*, για το πρόβλημα

μεγιστοποίησης (5.12) σε αυτή την περίπτωση δίνεται ως:

$$\begin{aligned} w_1 W &= \frac{A(\alpha_1 - r)\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1 - \rho_1^2)} - \frac{A(\alpha_2 - r)\sigma_{12}}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1 - \rho_1^2)} + \frac{H_1\alpha_1 g_1\sigma_1\sigma_2^2(\rho_2 - \rho_1\rho_3)}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1 - \rho_1^2)}, \quad (5.23) \\ w_2 W &= -\frac{A(\alpha_1 - r)\sigma_{12}}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1 - \rho_1^2)} + \frac{A(\alpha_2 - r)\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1 - \rho_1^2)} + \frac{H_1\alpha_1 g_1\sigma_1^2\sigma_2(-\rho_2\rho_1 + \rho_3)}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1 - \rho_1^2)}, \quad (5.24) \\ A &= -\frac{V_W}{V_{WW}}, \quad H_1 = -\frac{V_{\alpha_1 W}}{V_{WW}}. \end{aligned}$$

Παρακάτω θεωρούμε το πρόβλημα της βέλτιστης ευσταθούς επιλογής χαρτοφυλακίου αναφορικά με τη μεγιστοποίηση της ωφελιμότητας σε άπειρο χρονικό ορίζοντα και λαμβάνουμε συνθήκες η ικανοποίηση των οποίων οδηγεί σε αύξηση των επενδυσόμενων διαθέσιμων συγκριτικά με την περίπτωση της αποστροφής στον κίνδυνο.¹⁶ Για αυτή την ειδική περίπτωση η εξέλιξη του χαρτοφυλακίου και του α_1 δίνονται από την:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} dW(t) \\ d\alpha_1(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Ww_1(\alpha_1 - r) + w_2W(\alpha_2 - r) + (rW - c) \\ \alpha_1 f_1 \end{bmatrix} dt + \quad (5.25) \\ &\begin{bmatrix} W\sigma_1 w_1 + W\sigma_2 w_2 \rho_1 & W\sigma_2 w_2 \sqrt{1 - \rho_1^2} & 0 \\ \alpha_1 g_1 \rho_2 & \alpha_1 g_1 \tau_1 & \alpha_1 g_1 \tau_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\tilde{B}_1 \\ d\tilde{B}_2 \\ d\tilde{B}_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

με \tilde{B}_i $i = 1, 2, 3$ να συμβολίζουμε τρεις ανεξάρτητες κινήσεις *Brown*. Θεωρώντας διαταραχές στην από κοινού κατανομή των δύο αξιών και του α_1 και υιοθετώντας ένα κοινό περιορισμό εντροπίας η παραπάνω σχέση δύναται να γραφεί ως:

$$\begin{bmatrix} dW(t) \\ d\alpha_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} dt + G \begin{bmatrix} d\hat{B}_1 \\ d\hat{B}_2 \\ d\hat{B}_3 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

όπου

$$\begin{aligned} F_1 &= w_1 W(\alpha_1 - r + \sigma_1 h) + (rW - c) \\ &\quad + w_2 W \left(\alpha_2 - r + \sigma_2 h \left(\rho_1 + \sqrt{1 - \rho_1^2} \right) \right) \\ F_2 &= \alpha_1 f_1 + h\alpha_1 g_1 (\rho_2 + \tau_1 + \tau_2) \\ G &= \begin{bmatrix} W\sigma_1 w_1 + W\sigma_2 w_2 \rho_1 & W\sigma_2 w_2 \sqrt{1 - \rho_1^2} & 0 \\ \alpha_1 g_1 \rho_2 & \alpha_1 g_1 \tau_1 & \alpha_1 g_1 \tau_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Η *Bellman – Isaacs* συνθήκη, για αυτό το στοχαστικό παίγνιο μεταξύ των δύο παικτών μας δίνει ότι η συνάρτηση αξίας $V(W, \alpha_1, \theta)$, ικανοποιεί την

$$\delta V = \max_{w_i, C} \min_h \left\{ U(C) + \theta_3 \frac{h^2}{2} + V_W F_1 + V_{\alpha_1} F_2 + \frac{1}{2} \text{trace}(G^T \partial^2 V G) \right\}. \quad (5.27)$$

¹⁶Θα δώσουμε την απόδειξη για στοχαστική μέση αναμενόμενη απόδοση. Όμοιοι τύποι μπορούν να αποδειχθούν και στην περίπτωση που θεωρήσουμε στοχαστική τυπική απόκλιση.

όπου τώρα $\partial^2 V = \begin{bmatrix} V_{WW} & V_{W\alpha_1} \\ V_{W\alpha_1} & V_{\alpha_1\alpha_1} \end{bmatrix}$. Οι συνθήκες πρώτης τάξης για το παραπάνω πρόβλημα είναι:

$$\begin{aligned} U'(C) &= V_W, \\ h &= \frac{-V_W W(\sigma_1 w_1^* + \sigma_2(\rho + \sqrt{1-\rho^2})w_2^*) - \alpha_1 g_1 q V_{\alpha_1}}{\theta_3} \\ q &= \rho_2 + \tau_1 + \tau_2 \\ \sum_{j=1}^2 w_j^* W \sigma_{1j} &= A(\alpha_1 - r) + A\sigma_1 h + H_1 \alpha_1 g_1 \rho_2 \sigma_1 \\ \sum_{j=1}^2 w_j^* W \sigma_{2j} &= A(\alpha_2 - r) + A\sigma_2(\rho_1 + \sqrt{1-\rho_1^2})h + H_1 \alpha_1 g_1 \rho_3 \sigma_2 \\ A &= -\frac{V_W}{V_{WW}}, \quad H_1 = -\frac{V_{\alpha_1 W}}{V_{WW}} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας συμβολισμό πινάκων η λύση του παραπάνω προβλήματος δύναται να περιγράφει από την:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} w_1^* W & w_2^* W \end{bmatrix} \Lambda &= \begin{bmatrix} A(\alpha_1 - r) & A(\alpha_2 - r) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1 \alpha_1 g_1 \rho_2 \sigma_1 & H_1 \alpha_1 g_1 \rho_3 \sigma_2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -A\sigma_1 \frac{\alpha_1 g_1 (\rho_2 + \tau_1 + \tau_2) V_{\alpha_1}}{\theta_3} & -A\sigma_2 (\rho_1 + \sqrt{1-\rho_1^2}) \frac{\alpha_1 g_1 (\rho_2 + \tau_1 + \tau_2) V_{\alpha_1}}{\theta_3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

όπου:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \left(1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}}\right) & \sigma_{12} \left(1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}} \frac{\rho_1 + \sqrt{1-\rho_1^2}}{\rho}\right) \\ \sigma_{12} \left(1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}} \frac{\rho_1 + \sqrt{1-\rho_1^2}}{\rho_1}\right) & \sigma_{22} \left(1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}} (1 + 2\rho_1 \sqrt{1-\rho_1^2})\right) \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

Αν με Σ συμβολίσουμε το διαγώνιο πίνακα με διαγώνια στοιχεία σ_1, σ_2 , τότε:

$$\Lambda = \Sigma \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}}\right) & \left(\rho_1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}} (\rho_1 + \sqrt{1-\rho_1^2})\right) \\ \left(\rho_1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}} (\rho_1 + \sqrt{1-\rho_1^2})\right) & \left(1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}} (1 + 2\rho_1 \sqrt{1-\rho_1^2})\right) \end{bmatrix} \Sigma. \quad (5.29)$$

Λύνοντας, ως προς τα βέλτιστα ευσταθή ποσοστά του χαρτοφυλακίου που επενδύονται σε κάθε μία από τις δύο αξίες, λαμβάνουμε ότι:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} w_1^* W & w_2^* W \end{bmatrix} &= \frac{1}{(1-\rho_1^2)(1-2\frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}})} M \Sigma^{-1} \quad (5.30) \\ &\begin{bmatrix} 1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}} (1 + 2\rho_1 \sqrt{1-\rho_1^2}) & -\rho_1 + \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}} (\rho_1 + \sqrt{1-\rho_1^2}) \\ -\rho_1 + \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}} (\rho_1 + \sqrt{1-\rho_1^2}) & 1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}} \end{bmatrix} \Sigma^{-1}. \end{aligned}$$

όπου M ο πίνακας:

$$M = \begin{bmatrix} A(\alpha_1 - r) & A(\alpha_2 - r) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1\alpha_1g_1\rho_2\sigma_1 & H_1\alpha_1g_1\rho_3\sigma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A\sigma_1\frac{\alpha_1g_1(\rho_2+\tau_1+\tau_2)V_{\alpha_1}}{\theta_3} & -A\sigma_2(\rho_1 + \sqrt{1-\rho_1^2})\frac{\alpha_1g_1(\rho_2+\tau_1+\tau_2)V_{\alpha_1}}{\theta_3} \end{bmatrix}$$

Παρακάτω όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις εξετάζουμε τις διαφορές στα ποσοστά του χαρτοφυλακίου $\Delta w_i = w_i - w_i^*$, $i = 1, 2$ ανάμεσα στην περίπτωση της αποστροφής στην αβεβαιότητα, ($\theta < \infty$) και εκείνης της αποστροφής στον κίνδυνο, ($\theta \rightarrow \infty$). Χρησιμοποιώντας τις (5.23),(5.24),(5.30) λαμβάνουμε:

$$\begin{bmatrix} W\Delta w_1 & W\Delta w_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-\rho_1^2)}M_1\Sigma^{-1}\Xi\Sigma^{-1} - TM_2, \quad (5.31)$$

όπου:

$$\Xi = \begin{bmatrix} 1 & -\rho_1 \\ -\rho_1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{(1-2\frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}})} \quad (5.32)$$

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}}(1+2\rho_1\sqrt{1-\rho_1^2}) & -\rho_1 + \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}}(\rho_1 + \sqrt{1-\rho_1^2}) \\ -\rho_1 + \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}}(\rho_1 + \sqrt{1-\rho_1^2}) & 1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}} \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} A(\alpha_1 - r) & A(\alpha_2 - r) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1\alpha_1g_1\rho_2\sigma_1 & H_1\alpha_1g_1\rho_3\sigma_2 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

$$M_{21} = -A\sigma_1\frac{\alpha_1g_1(\rho_2+\tau_1+\tau_2)V_{\alpha_1}}{\theta_3} .$$

$$M_{22} = -A\sigma_2(\rho_1 + \sqrt{1-\rho_1^2})\frac{\alpha_1g_1(\rho_2+\tau_1+\tau_2)V_{\alpha_1}}{\theta_3}$$

και

$$T = \frac{1}{(1-\rho_1^2)(1-2\frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}})}\Sigma^{-1}Q\Sigma^{-1}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}}(1+2\rho_1\sqrt{1-\rho_1^2}) & -\rho_1 + \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}}(\rho_1 + \sqrt{1-\rho_1^2}) \\ -\rho_1 + \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}}(\rho_1 + \sqrt{1-\rho_1^2}) & 1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}} \end{bmatrix}$$

Μετά από υπολογισμούς:

$$\begin{bmatrix} W\Delta w_1 & W\Delta w_2 \end{bmatrix} = -TM_2 + \frac{AV_W^2}{(1-\rho_1^2)(\theta_3 V_{WW} - V_W^2)}M_1\Sigma^{-1} \begin{bmatrix} 2\rho_1\sqrt{1-\rho_1^2} - 1 & \rho_1 - \sqrt{1-\rho_1^2} \\ \rho_1 - \sqrt{1-\rho_1^2} & -1 \end{bmatrix} \Sigma^{-1}. \quad (5.33)$$

Από την παραπάνω εξίσωση μπορούμε να δούμε ότι οι μεταβολές στα βέλτιστα ποσοστά του χαρτοφυλακίου επηρεάζονται από δύο συνιστώσες. Μία που σχετίζεται με τον πίνακα M_1 και μία άλλη με τον M_2 . Αν η επίδραση κάθε μίας ξεχωριστά επάγει μία αύξηση στα συνολικά διαθέσιμα που επενδύονται σε κάθε μία από τις δύο αξίες, τότε τα συνολικά διαθέσιμα θα είναι αυξημένα συγκριτικά με την περίπτωση της αποστροφής στον κίνδυνο. Ο πίνακας M_1 περιέχει δύο υποπίνακες, όπου ο πρώτος εμφανίζεται και στην ενότητα που αντιμετωπίσαμε την περίπτωση όπου η μέση αναμενόμενη απόδοση δεν ήταν στοχαστικά εξελισσόμενη αλλά σταθερά. Αν με $(\cdot)_1$ συμβολίσουμε τη μεταβολή στο χαρτοφυλάκιο εξαιτίας της επίδρασης του πίνακα M_1 , τότε:

$$(W\Delta w_1)_1 = \frac{\kappa}{\sigma_1} \left[\frac{\alpha_1 - r}{\sigma_1} (2\rho_1 \sqrt{1 - \rho_1^2} - 1) + \frac{\alpha_2 - r}{\sigma_2} (\rho_1 - \sqrt{1 - \rho_1^2}) \right] \quad (5.34)$$

$$(W\Delta w_2)_1 = \frac{\kappa}{\sigma_2} \left[\frac{\alpha_1 - r}{\sigma_1} (\rho_1 - \sqrt{1 - \rho_1^2}) - \frac{\alpha_2 - r}{\sigma_2} \right] \quad (5.35)$$

$$\kappa = \frac{AV_W^2}{(1 - \rho_1^2)(\theta_3 V_{WW} - V_W^2)}. \quad (5.36)$$

Στην παραπάνω σχέση κ είναι πάντοτε αρνητικός αριθμός, επομένως θέτοντας:

$$\lambda = \frac{\frac{\alpha_2 - r}{\sigma_2}}{\frac{\alpha_1 - r}{\sigma_1}}, \quad (5.37)$$

λαμβάνουμε ότι:

$$(W\Delta w_1)_1 < 0 \quad \text{Αν} \quad \frac{\rho_1 - \sqrt{1 - \rho_1^2}}{1 - 2\rho_1 \sqrt{1 - \rho_1^2}} > \frac{1}{\lambda}, \quad (5.38)$$

$$(W\Delta w_2)_1 < 0 \quad \text{Αν} \quad \rho_1 - \sqrt{1 - \rho_1^2} > \lambda. \quad (5.39)$$

Όμοια αν $(\cdot)_2$ αναφέρεται στην επίδραση της δεύτερης συνιστώσας, στη βέλτιστη επιλογή χαρτοφυλακίου, του M_1 δηλαδή της $\begin{bmatrix} H_1 \alpha_1 g_1 \rho_2 \sigma_1 & H_1 \alpha_1 g_1 \rho_3 \sigma_2 \end{bmatrix}$ τότε:

$$(W\Delta w_1)_2 = \frac{\tilde{\kappa}}{\sigma_1} \left[\rho_2 (2\rho_1 \sqrt{1 - \rho_1^2} - 1) + \rho_3 (\rho_1 - \sqrt{1 - \rho_1^2}) \right] \quad (5.40)$$

$$(W\Delta w_2)_2 = \frac{\tilde{\kappa}}{\sigma_2} \left[\rho_2 (\rho_1 - \sqrt{1 - \rho_1^2}) - \rho_3 \right] \quad (5.41)$$

$$\tilde{\kappa} = \frac{H_1 \alpha_1 g_1 V_W^2}{(1 - \rho_1^2)(\theta_3 V_{WW} - V_W^2)} > (<) 0 \quad \text{Αν} \quad H_1 < (>) 0.$$

Άρα

$$(W\Delta w_1)_2 < 0 \quad \text{Αν} \quad \rho_2 (2\rho_1 \sqrt{1 - \rho_1^2} - 1) + \rho_3 (\rho_1 - \sqrt{1 - \rho_1^2}) < (>) 0 \quad (5.42)$$

$$(W\Delta w_2)_2 < 0 \quad \text{Αν} \quad \rho_2 (\rho_1 - \sqrt{1 - \rho_1^2}) - \rho_3 < (>) 0. \quad (5.43)$$

όταν $\tilde{\kappa} > (<)0$, αντίστοιχα. Επιπλέον, αν με $(\cdot)_3$ συμβολίσουμε την επίδραση εξαιτίας του M_2 , για $V_{\alpha_1} > 0$, έχουμε ότι:

$$(W\Delta w_1)_3 < 0 \text{ Αν } M_{21} > (<)0 \Leftrightarrow \rho_2 + \tau_1 + \tau_2 > 0 \quad (5.44)$$

$$(W\Delta w_2)_3 < 0 \text{ Αν } (\rho_1 + \sqrt{1 - \rho_1^2})(\rho_2 + \tau_1 + \tau_2) > 0 \quad (5.45)$$

Συνδυάζοντας τις (5.34) – (5.35) λαμβάνουμε ότι:

$$(W\Delta w)_1 = (W\Delta w_1)_1 + (W\Delta w_2)_1 = \quad (5.46)$$

$$\kappa \frac{\alpha_1 - r}{\sigma_1} \frac{1}{\sigma_2} \left[(2\rho_1 \sqrt{1 - \rho_1^2} - 1)\sigma + \lambda \sigma (\rho_1 - \sqrt{1 - \rho_1^2}) + \right.$$

$$\left. (\rho_1 - \sqrt{1 - \rho_1^2}) - \lambda \right] < 0$$

ισοδύναμα αν:

$$\hat{\lambda} \left(\rho_1 - \sqrt{1 - \rho_1^2} - \frac{1}{\sigma} \right) > \sigma (1 - 2\rho_1 \sqrt{1 - \rho_1^2}) - (\rho_1 - \sqrt{1 - \rho_1^2}) \quad (5.47)$$

$$\text{με } \hat{\lambda} = \frac{a_2 - r}{a_1 - r}, \quad \sigma = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

Επίσης, από τις (5.40) – (5.41) για το $(\cdot)_2$, έχουμε:

$$(W\Delta w)_2 = (W\Delta w_1)_2 + (W\Delta w_2)_2 \quad (5.48)$$

$$= \frac{\tilde{\kappa}}{\sigma_1} \left[\sigma \left(\rho_2 (2\rho_1 \sqrt{1 - \rho_1^2} - 1) + \rho_3 (\rho_1 - \sqrt{1 - \rho_1^2}) \right) \right.$$

$$\left. + \rho_2 (\rho_1 - \sqrt{1 - \rho_1^2}) - \rho_3 \right]$$

$$= \tilde{\kappa} P < 0 \text{ για } \tilde{\kappa} > (<)0, \text{ αν } P < (>)0 \text{ με}$$

$$P = \left[\sigma \left(\rho_2 (2\rho_1 \sqrt{1 - \rho_1^2} - 1) + \rho_3 (\rho_1 - \sqrt{1 - \rho_1^2}) \right) \right. \quad (5.49)$$

$$\left. + \rho_2 (\rho_1 - \sqrt{1 - \rho_1^2}) - \rho_3 \right].$$

Άρα, για τις επιτρεπτές τιμές του ρ_i , $i = 1, 2, 3$ και ανεξαρτήτως των τιμών της παραμέτρου ευστάθειας θ , είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε την παρακάτω Πρόταση:¹⁷

Πρόταση 5.1.3 Υποθέτοντας ότι είτε η μέση αναμενόμενη τιμή είτε η τυπική απόκλιση κινούνται στοχαστικά στο χρόνο, οι βέλτιστοι ευσταθείς κανόνες επιλογής χαρτοφυλακίου, για μία αγορά που αποτελείται από μία αξία σταθερής απόδοσης και δύο αξίες που χαρακτηρίζονται από αβεβαιότητα η οποία οφείλεται σε γενικούς μακροοικονομικούς παράγοντες, επάγουν τα παρακάτω

¹⁷ Χρησιμοποιώντας το πακέτο μαθηματικών εφαρμογών *Mathematica*, είμαστε σε θέση να αποδείξουμε ότι υπάρχουν τιμές των ρ_i που ικανοποιούν τις ικανές συνθήκες της παρακάτω πρότασης.

1. Αν οι (5.38), (5.42), (5.44) ικανοποιούνται ταυτόχρονα, τότε αυτές ορίζουν ένα χωρίο του χώρου καταστάσεων, όπου υπάρχει μία αύξηση στα επενδύσιμα διαθέσιμα στην πρώτη από τις δύο αξίες που δεν χαρακτηρίζονται από σταθερή απόδοση ή $\Delta w_1 = (W\Delta w_1)_1 + (W\Delta w_1)_2 + (W\Delta w_1)_3 < 0$.
2. Αν οι (5.39), (5.43), (5.45) ικανοποιούνται ταυτόχρονα, τότε αυτές ορίζουν ένα χωρίο του χώρου καταστάσεων, όπου υπάρχει μία αύξηση στα επενδύσιμα διαθέσιμα στη δεύτερη από τις δύο αξίες που δεν χαρακτηρίζονται από σταθερή απόδοση ή $\Delta w_2 = (W\Delta w_2)_1 + (W\Delta w_2)_2 + (W\Delta w_2)_3 < 0$.
3. Αν οι (5.44) – (5.45) και (5.47), (5.48) ικανοποιούνται ταυτόχρονα, τότε αυτές ορίζουν ένα χωρίο του χώρου καταστάσεων, όπου υπάρχει μία αύξηση στα συνολικά επενδύσιμα διαθέσιμα σε σχέση με την περίπτωση της αποστροφής στον κίνδυνο ή $\Delta w < 0$.
4. Όταν η ανησυχία για την ευστάθεια του μοντέλου μας δεν υπάρχει $\theta \rightarrow \infty$, τότε η διαφορά των επενδύσιμων διαθέσιμων ανάμεσα στην αποστροφή στον κίνδυνο και την αβεβαιότητα μηδενίζεται ή $\Delta w = \Delta w_1 + \Delta w_2 \rightarrow 0$, $(\Delta w_1, \Delta w_2) \rightarrow 0$

Θα πρέπει να τονιστεί, ξανά, ότι έξω από καθένα από τα παραπάνω χωρία δεν είμαστε σε θέση να καθορίσουμε αναλυτικά την κατεύθυνση της μεταβολής του χαρτοφυλακίου. Στην παραπάνω Πρόταση οι συνθήκες 1,2 δεν μπορούν να ισχύουν ποτέ ταυτόχρονα, άρα επομένως ποτέ δεν αυξάνουμε τα διαθέσιμα των δύο αξιών την ίδια χρονική στιγμή. Το κύριο αποτέλεσμα δίνεται από το τρίτο μέρος της παραπάνω πρότασης, όπου σύμφωνα με το οποίο κάτω από κατάλληλες συνθήκες δύναται τα συνολικά επενδύσιμα διαθέσιμα στις αξίες που εμπεριέχουν κίνδυνο να είναι αυξημένα σε σχέση με εκείνα της περίπτωσης του *Merton*, που αντιστοιχεί στην κλασική περίπτωση αποστροφής κινδύνου. Αυτή η επιθετικότερη συμπεριφορά είναι η πρώτη φορά η οποία από όσο γνωρίζουμε εμφανίζεται σε προβλήματα βέλτιστης επιλογής χαρτοφυλακίου. Αυτό το αποτέλεσμα, είναι παρόμοιο με εκείνο το οποίο αφορά την επιθετικότερη συμπεριφορά στη χάραξη νομισματικής πολιτικής. Αυτή η επιθετικότερη συμπεριφορά οφείλεται στη δομή της αβεβαιότητας, στο ότι δηλαδή αυτή εξαρτάται από μακροοικονομικούς παράγοντες, όπου σε συνάρτηση με την κατάλληλη δομή των παραμέτρων του προβλήματος, μπορεί να οδηγήσει σε σχετικά μεγαλύτερη αύξηση των επενδύσιμων διαθέσιμων στη μία αξία συγκριτικά με την μείωση στη άλλη, γεγονός που έχει σαν αποτέλεσμα τα συνολικά διαθέσιμα να εμφανίζονται αυξημένα σε σχέση με το κλασικό οικονομικό περιβάλλον.

Ιδιαίτερη έμφαση θα πρέπει να δοθεί επίσης στο γεγονός ότι η επιθετικότητα αυτή δεν εξαρτάται από το στοχαστικό σύνολο επενδυτικών επιλογών, αφού εύκολα μπορεί κανείς να δει ότι υπάρχει και θέτοντας $\rho_2 = \rho_3 = 0$, το οποίο

είναι ισοδύναμο με το να θέσουμε $V_{\sigma_1 W} = V_{a_1 W} = 0$. Αυτοί οι περιορισμοί αποκλείουν την στοχαστική κίνηση της μέσης αναμενόμενης τιμής και τυπικής απόκλισης και επάγουν ένα ντετερμινιστικό σύνολο στοχαστικών επιλογών.

5.2 Ευσταθείς κανόνες κατανομής χαρτοφυλακίου. Διαφορετικά επίπεδα αβεβαιότητας

Σε αυτό το υποκεφάλαιο αντικαθιστούμε την υπόθεση ότι η δομή της αβεβαιότητας εξαρτάται από γενικούς παράγοντες αναφορικά με την εξέλιξη της οικονομίας, από την υπόθεση ότι δηλαδή αυτή καθορίζεται από παράγοντες που σχετίζονται με τον μικρόκοσμο κάθε μίας αξίας (εταιρίας) χωριστά, όπως είναι για παράδειγμα οι δραστηριότητες της εταιρίας, η τεχνολογία και άλλες. Αυτή η υπόθεση αντιστοιχεί στην προσέγγιση των Hansen και Sargent, αναφορικά με την ύπαρξη ενός γενικού διανύσματος \mathbf{h} , όρων διαταραχής. Επομένως ο περιορισμός $h_i = h_j = h$, $i \neq j$, απαλείφεται και η εντροπία έχει την μορφή:

$$\mathbb{E}_Q \int_0^\infty e^{-\delta u} \frac{1}{2} \langle \mathbf{h}' \mathbf{h} \rangle du \leq \nu \quad (5.50)$$

5.2.1 Μία αξία που χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα, με στοχαστική μέση τιμή ή τυπική απόκλιση

Υποθέτουμε παρακάτω ότι η αγορά αποτελείται από μία αξία που χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα, όπου η μέση αναμενόμενη τιμή της είναι στοχαστική. Διαταράσσοντας το αρχικό μας σύστημα που δίνεται από τις (5.1), (5.6), χρησιμοποιώντας διαφορετικούς όρους διαταραχής $h_i, i = 1, 2$, τότε η εξίσωση για τα α_1, W , παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} d\alpha_1(t) \\ dW(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha_1[f_1 + g_1 h_1 \rho + g_1 h_2 \sqrt{1 - \rho^2}] \\ W w_1 (\alpha_1 + \sigma_1 h_1 - r) + (rW - c) \end{bmatrix} dt \\ &+ \begin{bmatrix} \alpha_1 g_1 \rho & \alpha_1 g_1 \sqrt{1 - \rho^2} \\ W \sigma_1 w_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\hat{B}_1 \\ d\hat{B}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

όπου, τώρα, το αντίστοιχο ισοδύναμο πολλαπλασιαστικό πρόβλημα ευσταθούς ελέγχου το οποίο μπορεί να συσχετιστεί με το πρόβλημα της μεγιστοποίησης της παρούσας τιμής της αναμενόμενης ωφελιμότητας ή

$$\max_{w_1, C} \mathbb{E}_0 \int_0^\infty e^{-\delta t} U(C) dt.$$

βάσει του περιορισμού εντροπίας (5.50) και των δυναμικών του συστήματος, γίνεται:

$$J(\theta) = \sup_{w_1, C} \inf_h \mathbb{E}_Q \int_0^\infty e^{-\delta t} \left[U(C) + \theta \left(\frac{h_1^2}{2} + \frac{h_2^2}{2} \right) \right] dt$$

Η συνάρτηση αξίας τώρα ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση.

$$\begin{aligned} \delta V = \max_{w_1, C} \min_{h_i} & \left\{ U(C) + \theta \left(\frac{h_1^2}{2} + \frac{h_2^2}{2} \right) + V_W [w_1(\alpha_1 + \sigma_1 h_1 - r)W + (rW - c)] \right. \\ & + V_{\alpha_1} \alpha_1 [f_1 + g_1(h_1 \rho + h_2 \sqrt{1 - \rho^2})] + \alpha_1 g_1 \rho W \sigma_1 w_1 V_{\alpha_1 W} + \\ & \left. \frac{1}{2} V_{WW} \sigma_1^2 w_1^2 W^2 + \frac{1}{2} V_{\alpha_1 \alpha_1} \alpha_1^2 g_1^2 \right\}. \end{aligned}$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης οι οποίες περιγράφουν τη λύση του παραπάνω διαφορικού παιγνίου μεταξύ δύο παικτών είναι:

$$\begin{aligned} U'(C) &= V_W, \\ h_1 &= -\frac{V_W W w_1 \sigma_1 + V_{\alpha_1} \alpha_1 g_1 \rho}{\theta}, \\ h_2 &= -\frac{V_{\alpha_1} \alpha_1 g_1 \sqrt{1 - \rho^2}}{\theta} \\ 0 &= V_W (\alpha_1 + \sigma_1 h_1 - r) + V_{WW} \sigma_1^2 W w_1 + \alpha_1 g_1 \rho \sigma_1 V_{\alpha_1 W} \end{aligned}$$

όπου στην περίπτωση αυτή λαμβάνουμε ότι το βέλτιστο ευσταθές ποσοστό, ισοδύναμα το ποσοστό του χαρτοφυλακίου που επενδύετε στην αξία που χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα σαν συνάρτηση της παραμέτρου ευστάθειας θ , είναι:

$$w_1^* W \left(1 - \frac{V_W^2}{\theta V_{WW}} \right) = \frac{A(\alpha_1 - r)}{\sigma_1^2} + H_1 \frac{g_1 \rho \alpha_1}{\sigma_1} + \frac{V_W V_{\alpha_1} g_1 \alpha_1}{\theta V_{WW} \sigma_1} \rho$$

όπου στην παραπάνω εξίσωση: $A = -\frac{V_W}{V_{WW}}$, $H_1 = -\frac{V_{\alpha_1 W}}{V_{WW}}$. Χρησιμοποιώντας μία παρόμοια προσέγγιση όπως στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, μπορούμε να καθορίσουμε τη μεταβολή στα βέλτιστα ευσταθή ποσοστά του χαρτοφυλακίου τα οποία επάγονται από την αποστροφή στην αβεβαιότητα συγκρινόμενα με εκείνα τα οποία μας δίνει η εφαρμογή της κλασικής θεωρίας, που αντιστοιχεί στην περίπτωση αποστροφής κινδύνου και να λάβουμε έτσι την παρακάτω Πρόταση:

Πρόταση 5.2.1 Σε μία αγορά που περιέχει μία αξία σταθερής απόδοσης και μία αξία όπου η απόδοση της χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα η οποία οφείλεται σε καθαρά παράγοντες που σχετίζονται με την κάθε αξία ξεχωριστά τότε Αν:

$$\begin{aligned} & \rho < 0 \text{ όταν } V_{\alpha_1} < 0 \\ \text{ή} & \rho > 0 \text{ όταν } V_{\alpha_1} > 0. \end{aligned}$$

τότε από τις παραπάνω σχέσεις καθορίζεται ένα χωρίο του χώρου καταστάσεων, όπου η συμπεριφορά του επενδύτη είναι πιο συντηρητική συγκρινόμενη με εκείνη που αντιστοιχεί στην αποστροφή κινδύνου, δηλαδή $w_1^* W$ είναι μικρότερο από το $w_1 W$.

5.2.2 Στοχαστική μέση αναμενόμενη τιμή και τυπική απόκλιση

Σε αυτή την περίπτωση υποθέτουμε ότι τόσο η μέση αναμενόμενη τιμή όσο και η τυπική απόκλιση είναι στοχαστικές, οπότε τα δυναμικά του συστήματος μας είναι:

$$\begin{aligned}
 dS &= Adt + \Sigma d\hat{B} \\
 S &= \begin{bmatrix} W(t) \\ \alpha_1(t) \\ \sigma_1(t) \end{bmatrix} \\
 A &= \begin{bmatrix} Ww_1(\alpha_1 + \sigma_1 h_1 - r) + (rW - c) \\ \alpha_1[f_1 + g_1 h_1 \rho_1 + g_1 h_2 \sqrt{1 - \rho_1^2}] \\ \sigma_1[f_2 + g_2(h_1 \rho_2 + h_2 \tau_1 + h_3 \tau_2)] \end{bmatrix} \\
 \Sigma &= \begin{bmatrix} W\sigma_1 w_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 g_1 \rho_1 & \alpha_1 g_1 (\rho_1 + \sqrt{1 - \rho_1^2}) & 0 \\ \sigma_1 g_2 \rho_2 & \sigma_1 g_2 \tau_1 & \sigma_1 g_2 \tau_2 \end{bmatrix} \\
 \hat{B} &= \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ \hat{B}_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Το αντίστοιχο πολλαπλασιαστικό πρόβλημα ευσταθούς ελέγχου είναι:

$$J(\theta) = \sup_{w_1, C} \inf_{h_i} \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \left[U(C) + \theta \left(\frac{h_1^2}{2} + \frac{h_2^2}{2} + \frac{h_3^2}{2} \right) \right] dt$$

βάσει των δυναμικών εξισώσεων του συστήματος. Επαναλαμβάνοντας τους αντίστοιχους υπολογισμούς προσαρμοσμένους στην νέα δομή του προβλήματος μας, λαμβάνουμε ένα σύστημα εξισώσεων που τώρα είναι το:

$$\begin{aligned}
 \rho_2 &> (<)0 \text{ όταν } V_{\sigma_1} > (<)0 \text{ αντίστοιχα} \\
 \rho_1 &> (<)0 \text{ όταν } V_{\alpha_1} > (<)0 \text{ αντίστοιχα} \\
 (1 - \rho_2^2)(1 - \rho_1^2) - (\rho_3 - \rho_1 \rho_2)^2 &> 0 \\
 (1 - \rho_2^2 - \tau_1^2) &> 0 \\
 \tau_1 &= \frac{\rho_3 - \rho_1 \rho_2}{\sqrt{1 - \rho_1^2}},
 \end{aligned} \tag{5.51}$$

με την αντίστοιχη πρόταση σε αυτή την περίπτωση να γίνεται ως:

Πρόταση 5.2.2 Με την δομή της αβεβαιότητας όπως ορίστηκε στην παραπάνω Πρόταση, το σύστημα των ανισοτήτων (5.51) για τις παραμέτρους του προβλήματος ορίζει ένα χωρίο στον χώρο καταστάσεων, όπου ένας επενδύτης ο οποίος αποστρέφεται την αβεβαιότητα μειώνει τα επενδύσιμα διαθέσιμα του στην αξία που εμπεριέχει κίνδυνο, συγκρινόμενα με εκείνα που θα επέλεγε να επενδύσει στην περίπτωση εκείνη όπου απλά αποστρεφόταν τον κίνδυνο. Αν το παραπάνω σύστημα των ανισοτήτων δεν ικανοποιείται, η μεταβολή στη σύνθεση του χαρτοφυλακίου δεν μπορεί να καθοριστεί αναλυτικά.

Συγκρίνοντας τις παραπάνω δύο Προτάσεις με τις δύο πρώτες αυτού του κεφαλαίου, όπου η αβεβαιότητα οφειλόταν σε γενικότερους μακροοικονομικούς παράγοντες, μπορεί κανείς να δει ότι η δομή της αβεβαιότητας δεν επηρεάζει το βασικό αποτέλεσμα και δεν δίνει επιθετικότερη συμπεριφορά. Απλά μία συντηρητικότερη συμπεριφορά σε ένα χωριό του χώρου καταστάσεων. Επιθετικότερη συμπεριφορά ίσως αλλά ίσως και όχι μπορεί να δίνεται εκτός του χωριού αυτού, αλλά για να φανεί πραγματικά αυτό απαιτούνται αριθμητικοί υπολογισμοί.

5.2.3 Δύο αξίες που εμπεριέχουν αβεβαιότητα

Υποθέτουμε, ότι η αγορά μας αποτελείται από δύο αξίες όπου η εξέλιξη της τιμής τους δεν συνοδεύεται από σταθερή απόδοση και μία αξία σταθερής απόδοσης, με τη μέση αναμενόμενη τιμή της μίας εκ των δύο αξιών να ικανοποιεί μία στοχαστική διαφορική εξίσωση. Θεωρώντας, ξανά, διαφορετικούς όρους διαταραχής το οποίο είναι σε συνέπεια με το γεγονός ότι η αβεβαιότητα οφείλεται σε παράγοντες εσωτερικούς σε κάθε επιχείρηση, οι εξισώσεις για το W και το α_1 γίνονται:

$$\begin{bmatrix} dW(t) \\ d\alpha_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} dt + G \begin{bmatrix} d\hat{B}_1 \\ d\hat{B}_2 \\ d\hat{B}_3 \end{bmatrix}$$

όπου τώρα:

$$\begin{aligned} F_1 &= Ww_1(\alpha_1 - r + \sigma_1 h_1) + (rW - c) + \\ &Ww_2 \left(\alpha_2 - r + \sigma_2 \left(h_1 \rho_1 + h_2 \sqrt{1 - \rho_1^2} \right) \right) \\ F_2 &= \alpha_1 f_1 + \alpha_1 g_1 (h_1 \rho_2 + h_2 \tau_1 + h_3 \tau_2) \\ G &= \begin{bmatrix} W\sigma_1 w_1 + W\sigma_2 w_2 \rho_1 & W\sigma_2 w_2 \sqrt{1 - \rho_1^2} & 0 \\ \alpha_1 g_1 \rho_2 & \alpha_1 g_1 \tau_1 & \alpha_1 g_1 \tau_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Οι συνθήκες Bellman-Isaacs για αυτό το παιχνίδι, επάγουν ότι η συνάρτηση αξίας $V(W, \alpha_1, \theta)$ ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση:

$$\delta V = \max_{w_i, C} \min_{h_i} \left\{ U(C) + \theta \left(\frac{h_1^2}{2} + \frac{h_2^2}{2} + \frac{h_3^2}{2} \right) + V_W F_1 + V_{\alpha_1} F_2 + \frac{1}{2} \text{trace}(G^T \partial^2 V G) \right\}$$

όπου τώρα ξανά $\partial^2 V = \begin{bmatrix} V_{WW} & V_{W\alpha_1} \\ V_{W\alpha_1} & V_{\alpha_1\alpha_1} \end{bmatrix}$. Οι συνθήκες πρώτης τάξης για το

παραπάνω παίγνιο μεταξύ των δύο παιχτών είναι:

$$\begin{aligned}
U'(C) &= V_W, \\
h_1 &= \frac{-V_W W [\sigma_1 w_1^* + \sigma_2 \rho_1 w_2^*] - \alpha_1 g_1 \rho_2 V_{\alpha_1}}{\theta} \\
h_2 &= \frac{-V_W W \sigma_2 \sqrt{1 - \rho_1^2} w_2^* - \alpha_1 g_1 \tau_1 V_{\alpha_1}}{\theta} \\
h_3 &= \frac{-\alpha_1 g_1 \tau_2 V_{\alpha_1}}{\theta} \\
\sum_{j=1}^2 w_j^* W \sigma_{1j} &= A(\alpha_1 - r) + A \sigma_1 h_1 + H_1 \alpha_1 g_1 \rho_2 \sigma_1 \\
\sum_{j=1}^2 w_j^* W \sigma_{2j} &= A(\alpha_2 - r) + A \sigma_2 (\rho_1 h_1 + \sqrt{1 - \rho_1^2} h_2) + H_1 \alpha_1 g_1 \rho_3 \sigma_2 \\
A &= -\frac{V_W}{V_{WW}}, \quad H_1 = -\frac{V_{\alpha_1 W}}{V_{WW}}.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας συμβολισμό πινάκων, η λύση του παραπάνω προβλήματος μπορεί να περιγραφεί από την παρακάτω εξίσωση:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} w_1^* W & w_2^* W \end{bmatrix} \Sigma = \\
& \lambda \begin{bmatrix} A(\alpha_1 - r) & A(\alpha_2 - r) \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} H_1 \alpha_1 g_1 \rho_2 \sigma_1 & H_1 \alpha_1 g_1 \rho_3 \sigma_2 \end{bmatrix} \\
& + \lambda \begin{bmatrix} -A \sigma_1 \frac{\alpha_1 g_1 \rho_2 V_{\alpha_1}}{\theta} & -A \sigma_2 \frac{\alpha_1 g_1 \rho_3 V_{\alpha_1}}{\theta} \end{bmatrix}, \quad \text{με } \lambda = \frac{1}{1 - \frac{V_W^2}{\theta V_{WW}}} < 1
\end{aligned}$$

όπου:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}.$$

Η βέλτιστη λύση που δίνεται από τον τύπο του *Merton* είναι:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} w_1 W & w_2 W \end{bmatrix} \Sigma = \\
& \begin{bmatrix} A(\alpha_1 - r) & A(\alpha_2 - r) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1 \alpha_1 g_1 \rho_2 \sigma_1 & H_1 \alpha_1 g_1 \rho_3 \sigma_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τις παραπάνω δύο εξισώσεις, εξαιτίας του ότι $\lambda = \frac{1}{1 - \frac{V_W^2}{\theta V_{WW}}} < 1$,

είμαστε σε θέση να πούμε ότι αν οι ποσότητες ρ_2, V_{α_1} , έχουν ίδια πρόσημα και το ίδιο επίσης ισχύει και για τις ρ_3, V_{α_1} τότε $w_1^* W$ $w_2^* W$ είναι μικρότερα από τα $w_1 W$ $w_2 W$. Επομένως, μπορεί να διατυπωθεί η παρακάτω Πρόταση.

Πρόταση 5.2.3 Σε μία αγορά με δύο αξίες όπου δεν χαρακτηρίζονται από σταθερή απόδοση και μία αξία σταθερής απόδοσης και ένα επενδύτη που αποστρέφεται την αβεβαιότητα ως προς: (i) την εξέλιξη της τιμής των αξιών (ii) είτε την εξέλιξη της μέσης αναμενόμενης τιμής είτε την εξέλιξη της

τυπικής απόκλισης της μίας εκ των δύο αξιών, θα υπάρχει ένα χωριό του χώρου καταστάσεων το οποίο καθορίζεται από την παρακάτω συνθήκη:

$$\rho_2 V_{\alpha_1} > 0, \rho_3 V_{\sigma_1} > 0$$

όπου ο επενδύτης μειώνει τα συνολικά διαθέσιμα των αξιών που χαρακτηρίζονται από αβεβαιότητα, σε σχέση με ένα επενδύτη που αποστρέφεται τον κίνδυνο. Για το υπόλοιπο του χώρου καταστάσεων η μεταβολή των επενδύμενων ποσοστών είναι αβέβαιη και δεν μπορεί να χαρακτηριστεί αναλυτικά.

Συγκρίνοντας την παραπάνω πρόταση με την αντίστοιχη εκείνη του προηγούμενου υποκεφαλαίου, όπου είχαμε θεωρήσει ότι η αβεβαιότητα οφείλεται σε γενικούς μακροοικονομικούς παράγοντες και είχαμε θεωρήσει ίδιους όρους διαταραχής h_i για να ενσωματώσουμε αυτή στο μοντέλο μας, τότε μπορεί κανείς να δει ότι η δομή της αβεβαιότητας και ειδικότερα αν η αβεβαιότητα μας σχετικά με την πορεία εξέλιξης της οικονομίας μετατραπεί σε αβεβαιότητα οφειλόμενη σε μικροοικονομικούς παράγοντες, εξαλείφεται το χωριό επιθετικής συμπεριφοράς. Επομένως, όπως και στην περίπτωση που αντιστοιχεί στη χάραξη νομισματικής πολιτικής [58], η επιθετικότερη συμπεριφορά φαίνεται να εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο δομείται η αβεβαιότητα.

5.3 Αβεβαιότητα ως προς μία αξία. Το "home bias puzzle"

Θεωρούμε τώρα ένα παρόμοιο πρόβλημα με το αρχικό, όπου η πρώτη εκ των δύο αξιών εκλαμβάνεται ως μία αξία η οποία διαπραγματεύεται σε μία ξένη αγορά για την οποία υπάρχει ανησυχία σχετικά με την αξιοπιστία του μοντέλου που περιγράφει την εξέλιξη της τιμής της. Η άλλη αξία, θεωρούμε ότι είναι μία αξία που διαπραγματεύεται στην εγχώρια αγορά και υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε με σιγουριά την εξέλιξη της τιμής της που περιγράφεται από το μοντέλο αναφοράς. Άρα, σε αυτή την περίπτωση αναφορικά ως προς την μία αξία, την εγχώρια, ο επενδυτής αποστρέφεται τον κίνδυνο, ενώ ως προς την άλλη, αυτός αποστρέφεται την αβεβαιότητα και ανησυχεί για την ευστάθεια του μοντέλου αναφοράς, που περιγράφει την εξέλιξη της τιμής της.

Σε αυτή την περίπτωση, η χρήση ευσταθών κανόνων κατανομής χαρτοφυλακίου, απαιτεί την διαταραχή μόνο των *Brownian* κινήσεων που σχετίζονται με την εξέλιξη της τιμής της πρώτης αξίας, καθώς και της μέσης αναμενόμενης απόδοσης αυτής α_1 .¹⁸ Η σχέση (5.25), επίσης ισχύει και σε αυτή την περίπτωση ενώ η αντίστοιχη της (5.26) τώρα γίνεται:

$$\begin{aligned} F_1 &= Ww_1(\alpha_1 - r + \sigma_1 h) + (rW - c) \\ &\quad + Ww_2 \left(\alpha_2 - r + \sigma_2 h \rho_1 + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho_1^2} \right) \\ F_2 &= \alpha_1 f_1 + \tau_1 \alpha_1 g_1 + h \alpha_1 g_1 (\rho_2 + \tau_2), \end{aligned} \quad (5.52)$$

¹⁸Τα αποτελέσματα σε αυτή την υποενοότητα δεν εξαρτιούνται από το αν θεωρήσουμε όμοια η διαφορετικά επίπεδα αβεβαιότητας μεταξύ των αξιών. Εμείς παρουσιάζουμε την περίπτωση με διαφορετικά επίπεδα αβεβαιότητας.

ενώ το G παραμένει το ίδιο. Η *Bellman – Isaacs* δηλώνει ότι η $V(W, \alpha_1, \theta)$ ικανοποιεί ξανά την (5.27), ενώ οι συνθήκες πρώτης τάξης τώρα είναι:

$$\begin{aligned} U'(C) &= V_W, & (5.53) \\ h &= -\frac{V_{WW}(\sigma_1 w_1^* + \sigma_2 \rho_1 w_2^*) + (\alpha_1 g_1 (\rho_2 + \tau_2) V_{\alpha_1})}{\theta_3} \\ \sum_{j=1}^2 w_j^* W \sigma_{1j} &= A(\alpha_1 - r) + A\sigma_1 h + H_1 \alpha_1 g_1 \rho_2 \sigma_1 \\ \sum_{j=1}^2 w_j^* W \sigma_{2j} &= A(\alpha_2 - r) + A\sigma_2(\rho_1 h + \sqrt{1 - \rho_1^2}) + H_1 \alpha_1 g_1 \rho_3 \sigma_2. \end{aligned}$$

$$A = -\frac{V_W}{V_{WW}}, \quad H_1 = -\frac{V_{\alpha_1 W}}{V_{WW}}$$

Χρησιμοποιώντας συμβολισμό πινάκων, η λύση του παραπάνω προβλήματος δύναται να περιγράψει από την:

$$\begin{bmatrix} w_1^* W & w_2^* W \end{bmatrix} \Lambda = \begin{bmatrix} A(\alpha_1 - r) & A(\alpha_2 - r + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho_1^2}) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} H_1 \alpha_1 g_1 \rho_2 \sigma_1 & H_1 \alpha_1 g_1 \rho_3 \sigma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A\sigma_1 \frac{\alpha_1 g_1 (\rho_2 + \tau_2) V_{\alpha_1}}{\theta_3} & -A\sigma_2 \rho_1 \frac{\alpha_1 g_1 (\rho_2 + \tau_2) V_{\alpha_1}}{\theta_3} \end{bmatrix}$$

όπου

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \left(1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}}\right) & \sigma_{12} \left(1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}}\right) \\ \sigma_{12} \left(1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}}\right) & \sigma_{22} \left(1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}} \rho_1^2\right) \end{bmatrix}.$$

Αν Σ είναι διαγώνιος πίνακας με σ_1, σ_2 στην κύρια διαγώνιο τότε

$$\Lambda = \Sigma \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}}\right) & \left(1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}}\right) \\ \left(1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}}\right) & \left(1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}} \rho_1^2\right) \end{bmatrix} \Sigma.$$

Λύνοντας, το παραπάνω σύστημα, είμαστε σε θέση να καθορίσουμε τα βέλτιστα ευσταθή ποσοστά του χαρτοφυλακίου που επενδύονται σε κάθε μία από τις δύο αξίες σαν:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} w_1^* W & w_2^* W \end{bmatrix} &= \frac{1}{(1 - \rho_1^2) \left(1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}}\right) \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}}} M \Sigma^{-1} & (5.54) \\ \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}} \rho_1^2\right) & -\left(1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}}\right) \\ -\left(1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}}\right) & \left(1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}}\right) \end{bmatrix} &\Sigma^{-1}. \end{aligned}$$

όπου τώρα ο πίνακας M είναι ο:

$$M = \begin{bmatrix} A(\alpha_1 - r) & A(\alpha_2 - r + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho_1^2}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1 \alpha_1 g_1 \rho_2 \sigma_1 & H_1 \alpha_1 g_1 \rho_3 \sigma_2 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} -A\sigma_1 \frac{\alpha_1 g_1 (\rho_2 + \tau_2) V_{\alpha_1}}{\theta_3} & -A\sigma_2 \rho_1 \frac{\alpha_1 g_1 (\rho_2 + \tau_2) V_{\alpha_1}}{\theta_3} \end{bmatrix}$$

Παρακάτω, εξετάζουμε τις διάφορες $\Delta w_i = w_i - w_i^*$, $i = 1, 2$, ανάμεσα στην περίπτωση της αποστροφής κινδύνου και εκείνης που αφορά την αποστροφή στην αβεβαιότητα. Χρησιμοποιώντας τις (5.23), (5.24), (5.54), λαμβάνουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} W\Delta w_1 & W\Delta w_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(1 - \rho_1^2)} M_1 \Sigma^{-1} \Xi \Sigma^{-1} - T M_2, \quad (5.55)$$

όπου σε αυτή την ειδική περίπτωση:

$$\Xi = \begin{bmatrix} 1 & -\rho_1 \\ -\rho_1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{(1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}}) \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}}} \begin{bmatrix} (1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}} \rho_1^2) & (\frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}} - 1) \\ -(1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}}) & (1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}}) \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} A(\alpha_1 - r) & A(\alpha_2 - r + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho_1^2}) \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} H_1 \alpha_1 g_1 \rho_2 \sigma_1 & H_1 \alpha_1 g_1 \rho_3 \sigma_2 \end{bmatrix} \\ M_2 = [M_{21} \ M_{22}] \\ M_{21} = -A\sigma_1 \frac{\alpha_1 g_1 (\rho_2 + \tau_2) V_{\alpha_1}}{\theta_3}, \ M_{22} = -A\sigma_2 \rho_1 \frac{\alpha_1 g_1 (\rho_2 + \tau_2) V_{\alpha_1}}{\theta_3}$$

και

$$T = \frac{1}{(1 - \rho_1^2) (1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}}) \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}}} \Sigma^{-1} Q \Sigma^{-1} \\ Q = \begin{bmatrix} (1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}} \rho_1^2) & -(1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}}) \\ -(1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}}) & (1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}}) \end{bmatrix}$$

Μετά από κάποιους υπολογισμούς:

$$\begin{bmatrix} W\Delta w_1 & W\Delta w_2 \end{bmatrix} = -T M_2 + \frac{1}{(1 - \rho_1^2)} M_1 \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} \xi & x - \rho_1 \\ x - \rho_1 & 1 - x \end{bmatrix} \Sigma^{-1}. \quad (5.56)$$

$$\mu\epsilon \ \xi = 1 + \frac{x(\rho_1^2 - x)}{x - 1} > 0, \ x = \frac{\theta_3 V_{WW}}{V_W^2}.$$

Από την παραπάνω εξίσωση, βλέπουμε ότι τα βέλτιστα ευσταθή ποσοστά του χαρτοφυλακίου επηρεάζονται από δύο συνιστώσες M_1 και M_2 , όπου ο πίνακας M_1 αποτελείται από δύο υποπίνακες. Εργαζόμενοι ομοίως όπως και στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, λαμβάνουμε ότι:

$$(W\Delta w_1)_1 = \frac{\kappa}{\sigma_1} \left[\frac{\alpha_1 - r}{\sigma_1} \xi + \frac{\alpha_2 - r + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho_1^2}}{\sigma_2} (x - \rho_1) \right] \quad (5.57)$$

$$(W\Delta w_2)_1 = \frac{\kappa}{\sigma_2} \left[\frac{\alpha_1 - r}{\sigma_1} (x - \rho_1) - \frac{\alpha_2 - r + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho_1^2}}{\sigma_2} (1 - x) \right] \quad (5.58)$$

$$\text{όπου τώρα } \kappa = \frac{1}{(1 - \rho_1^2)}.$$

Στη παραπάνω εξίσωση κ θετικό, οπότε θέτοντας

$$\hat{\lambda} = \frac{\frac{\alpha_2 - r + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho_1^2}}{\sigma_2}}{\frac{\alpha_1 - r}{\sigma_1}}, \quad (5.59)$$

λαμβάνουμε ότι:

$$(W\Delta w_1)_1 < 0 \quad \text{Αν } \xi < \hat{\lambda}(x - \rho_1) \quad (5.60)$$

$$(W\Delta w_2)_1 < 0 \quad \text{Αν } \frac{x - \rho_1}{1 - x} < \hat{\lambda}. \quad (5.61)$$

Η παραπάνω εξίσωση υποδηλώνει ότι πάντοτε μειώνουμε τα διαθέσιμα στη δεύτερη αξία, αν $\rho_1 > 0$ και $\hat{\lambda} > 0$ ή διαφορετικά όταν $\hat{\lambda} > 1$.

Θεωρώντας την περίπτωση όπου $V_{\alpha_1} > 0, H_1 < 0$, τότε αν $(\cdot)_2$ αναφέρεται στον όρο που σχετίζεται με τον πίνακα $\begin{bmatrix} H_1 \alpha_1 g_1 \rho_2 \sigma_1 & H_1 \alpha_1 g_1 \rho_3 \sigma_2 \end{bmatrix}$, τότε:

$$(W\Delta w_1)_2 = \frac{\tilde{\kappa}}{\sigma_1} \left[\rho_2 \xi + \rho_3 (x - \rho_1) \right] \quad (5.62)$$

$$(W\Delta w_2)_2 = \frac{\tilde{\kappa}}{\sigma_2} \left[\rho_2 (x - \rho_1) + \rho_3 (1 - x) \right] \quad (5.63)$$

$$\text{όπου τώρα } \tilde{\kappa} = \frac{H_1 \alpha_1 g_1}{(1 - \rho_1^2)} < 0$$

Έτσι

$$(W\Delta w_1)_2 < 0 \quad \text{Αν } \rho_2 > 0, \rho_1 > 0, \rho_3 < 0. \quad (5.64)$$

$$(W\Delta w_2)_2 < 0 \quad \text{Αν } 0 < \rho_2 < \rho_3, \rho_1 > 0 \text{ είτε} \quad (5.65)$$

$$\rho_1 > 0, \rho_2 < 0, \rho_3 > 0.$$

Τελικά, αν $(\cdot)_3$ αναφέρεται στον όρο $-TM_2$ ο οποίος σχετίζεται με τον πίνακα $\begin{bmatrix} M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$, τότε:

$$\begin{aligned}
(W\Delta w_1)_3 &= \frac{\tilde{\kappa}'}{\sigma_1} \left[(\rho_2 + \tau_2) \frac{(\rho_1^2 - x)x}{1-x} - \rho_1(\rho_2 + \tau_2)x \right] \\
(W\Delta w_2)_3 &= \frac{\tilde{\kappa}'}{\sigma_2} \left[-(\rho_2 + \tau_2)x + \rho_1(\rho_2 + \tau_2)x \right] \\
\text{όπου } \tilde{\kappa}' &= -\frac{A \frac{\alpha_1 g_1 V_{\alpha_1}}{\theta_3}}{(1 - \rho_1^2)} > 0
\end{aligned}$$

Επομένως

$$(W\Delta w_1)_3 < 0 \text{ Αν } \rho_1 < 0, (\rho_2 + \tau_2) > 0. \quad (5.66)$$

$$(W\Delta w_2)_3 < 0 \text{ Αν } \rho_1(\rho_2 + \tau_2) > (\rho_2 + \tau_2) \quad (5.67)$$

Η (5.60) μαζί με τις (5.64), (5.66) δεν είναι δυνατόν να ισχύουν ποτέ ταυτόχρονα. Επομένως, σε αυτή την περίπτωση δεν είμαστε σε θέση να δείξουμε ένα γενικό κανόνα σύμφωνα με τον οποίο αυξάνουμε τα διαθέσιμα συγκριτικά με την περίπτωση της αποστροφής στον κίνδυνο. Άρα, στην περίπτωση όπου ο επενδυτής παρουσιάζει αποστροφή στην αβεβαιότητα, αναφορικά με την εξέλιξη της τιμής της πρώτης αξίας, έχουμε δείξει ότι, όταν $V_{\alpha_1} > 0, H_1 > 0$ ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 5.3.1 *Για μία αγορά που αποτελείται από μία αξία σταθερής απόδοσης και δύο άλλες, όπου ως προς την πρώτη ο επενδυτής αποστρέφεται την αβεβαιότητα που σχετίζεται με την εξέλιξη της τιμής της, ενώ ως προς τη δεύτερη αποστρέφεται τον κίνδυνο, τότε οι ευσταθείς κανόνες κατανομής χαρτοφυλακίου επάγουν τα παρακάτω:*

1. Αν οι (5.61), (5.65), (5.67) ικανοποιούνται, τότε ορίζουν ένα χωρίο του χώρου καταστάσεων όπου υπάρχει μία αύξηση στα επενδύσιμα διαθέσιμα στη δεύτερη αξία συγκριτικά με την περίπτωση της αποστροφής στον κίνδυνο ή $\Delta w_2 = (W\Delta w_2)_1 + (W\Delta w_2)_2 + (W\Delta w_2)_3 < 0$.
2. Όταν η ανησυχία για την ευστάθεια του μοντέλου δεν υπάρχει $\theta \rightarrow \infty$, τότε η μεταβολή στα βέλτιστα ποσοστά του χαρτοφυλακίου ανάμεσα στην περίπτωση της αποστροφής στην αβεβαιότητα και εκείνης στην αποστροφή στον κίνδυνο, που οφείλεται ουσιαστικά στην εξέλιξη της τιμής της μίας μόνο από τις δύο αξίες που δεν χαρακτηρίζονται από σταθερή απόδοση ή $\Delta w = \Delta w_1 + \Delta w_2 \rightarrow 0, (\Delta w_1, \Delta w_2) \rightarrow 0$.

Επομένως, η αποστροφή στην αβεβαιότητα ως προς την μία μόνο αξία επάγει ότι τα διαθέσιμα για την αξία ως προς την οποία δεν έχουμε αποστροφή στην αβεβαιότητα, θα είναι αυξημένα συγκριτικά με την περίπτωση όπου ο επενδυτής θεωρούμε ότι αποστρέφεται τον κίνδυνο και στις δύο αξίες.

Εφαρμόζοντας την ίδια μεθοδολογία και στις άλλες τρεις αναφορικά με τα πρόσημα ανάμεσα στα H_1 και V_{α_1} περιπτώσεις,¹⁹ όταν υπάρχει αβεβαιότητα ως προς τη μέση αναμενόμενη απόδοση της τιμής της μίας αξίας, λαμβάνουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:²⁰

Πρόταση 5.3.2 Για μία αγορά η οποία αποτελείται από μία αξία σταθερής απόδοσης και δύο άλλες οι οποίες εξελίσσονται στοχαστικά και ως προς την μία μόνο έχουμε αβεβαιότητα αναφορικά με την εξέλιξη της τιμής της, οι ευσταθείς κανόνες κατανομής χαρτοφυλακίου επάγουν τα παρακάτω

1. Είναι περισσότερο πιθανόν να αυξήσουμε τα διαθέσιμα στην δεύτερη αξία ως προς την οποία απλά αποστρεφόμαστε τον κίνδυνο ως προς την εξέλιξη της τιμής της, συγκριτικά με την περίπτωση όπου υπάρχει αποστροφή αβεβαιότητας ως προς την εξέλιξη της τιμής της πρώτης αξίας ή $\Delta w_2 = (W\Delta w_2)_1 + (W\Delta w_2)_2 + (W\Delta w_2)_3 < 0$.
2. Όταν η ανησυχία σχετικά με την ευστάθεια του μοντέλου αναφοράς εξαφανίζεται ή $\theta \rightarrow \infty$, τότε η διαφορά ανάμεσα στην αποστροφή στον κίνδυνο και την αποστροφή στην αβεβαιότητα μηδενίζεται ή $\Delta w = \Delta w_1 + \Delta w_2 \rightarrow 0, (\Delta w_1, \Delta w_2) \rightarrow 0$.

Η απόδειξη δίνεται στο παράρτημα [†]

Η παραπάνω πρόταση, προτείνει ότι ο επενδυτής-καταναλωτής είναι περισσότερο πιθανόν να αυξήσει τα διαθέσιμα στην δεύτερη αξία, που θεωρούμε ότι διαπραγματεύεται στην εγχώρια αγορά και ως προς την οποία δεν έχουμε αποστροφή αβεβαιότητας ως προς την εξέλιξη της τιμής της και όπου ο επενδυτής πιστεύει ότι το μοντέλο αναφοράς περιγράφει επαρκώς την εξέλιξη της τιμής της, και ανησυχεί μόνο για την ευστάθεια του μοντέλου που δίνει την εξέλιξη της άλλης αξίας που διαπραγματεύεται σε μία ξένη αγορά. Αυτό το αποτέλεσμα ισχύει τόσο για την περίπτωση στοχαστικής μέσης αναμενόμενης τιμής και στοχαστικής τυπικής απόκλισης. Άρα, το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να θεωρηθεί σαν μία επιπλέον εξήγηση για το «home bias puzzle».

¹⁹ Οι άλλες τρεις περιπτώσεις είναι:

$H_1 > 0, V_{\alpha_1} < 0$
$H_1 > 0, V_{\alpha_1} > 0$
$H_1 < 0, V_{\alpha_1} < 0$

²⁰ Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει αβεβαιότητα σε σχέση με τη στοχαστική κίνηση που σχετίζεται με την τυπική απόκλιση της αξίας αντί για τη μέση αναμενόμενη τιμή, τότε το αποτέλεσμα παραμένει το ίδιο. Για την απόδειξη αρκεί να αντικαταστήσουμε το H_2 με το H_1 και το V_{σ_1} με το V_{α_1}

6 Αβεβαιότητα και διαχείριση οικοσυστημάτων

Τα τελευταία χρόνια ο όρος βιοποικιλότητα ο οποίος αναφέρεται στην εκδήλωση ζωής σε όλες τις μορφές της, έχει αρχίσει να γίνεται ιδιαίτερα διαδεδομένος. Σημασία έχει αποδοθεί σε αυτήν από περιβαλλοντολογικές ομάδες, πολιτικούς, από τον τύπο και την επιστημονική κοινότητα. Έχει διαπιστωθεί ότι η βιοποικιλότητα είναι η πηγή της βιολογικής υγείας και παρέχει την βάση για τη ζωή στη γη, περιεχόμενης και αυτής του ανθρώπου. Οι βιολογικοί πόροι παρέχουν όλη μας την τροφή και το νερό, βοηθούν στην υποστήριξη των βασικών παραγωγικών διαδικασιών, καθώς επίσης στη διατήρηση της ισορροπίας στη γήινη ατμόσφαιρα. Η βιοποικιλότητα, επίσης, αποτελεί βασικό συστατικό για μία καλή ζωή, υγεία, αρμονικές κοινωνικές σχέσεις και ασφάλεια. Οι βασικές εθνικές, κοινωνικές, πολιτισμικές αξίες των βιολογικών αποθεμάτων, όσο και η συμβολή τους στην οικονομική ανάπτυξη η οποία μετριέται σε νομισματικούς όρους, έχουν επίσης αναγνωρισθεί.²¹ Επομένως η διατήρηση της βιοποικιλότητας είναι βασική για την εύρυθμη μελλοντική ζωή στον πλανήτη, καθώς η εξάλειψη της λειτουργεί αρνητικά στη λειτουργία των γήινων οικοσυστημάτων. Η εξάλειψη αρκετών ειδών, καθώς επίσης και το γεγονός ότι έχει αρχίσει να χάνεται η βιοποικιλότητα είναι ένα πραγματικό φαινόμενο. Όπως φαίνεται και από τα συμπεράσματα της πρόσφατης αναφοράς του Millennium Ecosystem Assessment (MEA), [55], τις τελευταίες εκατοντάδες χρόνια, ο άνθρωπος μέσω των παρεμβάσεων του και των αποφάσεων του ως προς τη διαχείριση των οικοσυστημάτων, είχε σαν αποτέλεσμα να αυξηθεί ο ρυθμός εξαφάνισης των ειδών κατά 1000 φορές σε σχέση με τους ρυθμούς που υπήρχαν κατά τη διάρκεια της ιστορίας του πλανητικού μας συστήματος. Επίσης, η γενετική ποικιλότητα έχει μειωθεί καθολικά ειδικότερα ανάμεσα στα είδη που μπορούμε να παράγουμε με «καλλιέργεια»²²

Για να έχει όμως πρακτική σημασία ο όρος είναι απαραίτητη η μέτρηση του και ποσοτικοποίηση του κατά κάποια μορφή. Η ιδανική μέτρηση της βιοποικιλότητας είναι αρκετά δύσκολη αφού δεν υπάρχει ένα απλό αντικειμενικό μέτρο, αλλά μόνο μέτρα τα οποία σχετίζονται με ειδικές εφαρμογές. Παρόλα αυτά, το πόσο πλούσια σε είδη είναι μία πληθυσμιακή κατηγορία που εξετάζουμε, (*species richness*), δηλαδή ποιο το πλήθος του συνολικού αριθμού των ειδών της το οποίο είναι εν ζωή, αποτελεί ένα μέτρο το οποίο έχει μελετηθεί ευρύτατα στη βιβλιογραφία και κατά κάποιο τρόπο αποτελεί ένα κοινό νόμισμα για τη μέτρηση της βιοποικιλότητας²³. Αυτό θα υιοθετήσουμε και εμείς για τη μελέτη της βιοποικιλότητας στην παρακάτω προσέγγιση.

Η εξαφάνιση των ειδών μπορεί να επιταχυνθεί από τα συνήθως υψηλά επίπεδα αβεβαιότητας, σχετικά με τις οικολογικές, κοινωνικές, και τις παγκόσ-

²¹ Δείτε για παράδειγμα *Perrings et. al.* [60] για την αξία της διατήρησης των πόρων στην κοινωνία.

²² Έχει εκτιμηθεί ότι το 50% της βιοτικής ποικιλότητας θα χαθεί αυτό τον αιώνα (*Soule* [70])

²³ Δείτε για παράδειγμα *Gaston* [29]

μίες οικονομικές εξελίξεις, γεγονός το οποίο έχει ως συνέπεια την πιθανή από κοινού δράση γεγονότων που δεν περιμένουμε, παράλληλα με ακραία σενάρια. Αυτά, τα μη προγραμματισμένα γεγονότα, όταν συνδυαστούν με ανθρώπινες ενέργειες στον τομέα της διαχείρισης ίσως προκαλέσουν επιτάχυνση του ρυθμού εξαφάνισης κάποιων ειδών. Η αβεβαιότητα, λοιπόν, ως προς την εξέλιξη των δυναμικών του συστήματος μας, δημιουργεί την ανάγκη να προφυλαχθούμε από τις απρόσμενες συνέπειες οι οποίες μπορεί να προκαλέσουν την εξαφάνιση κάποιων ειδών. Τα παραπάνω γενούν την ανάγκη να ελέγξουμε τα δυναμικά του συστήματος μας κάτω από αβεβαιότητα και ακραία σενάρια.

Γενικά, αν και οι οικονομολόγοι προσπαθούν να ελέγξουν τα οικοσυστήματα και τη διαχείριση της βιοποικιλότητας κατά βέλτιστο τρόπο, αρκετές φορές είναι δύσκολο να γίνει αυτό ακόμα και σε θεωρητικό επίπεδο. Επομένως, στην περίπτωση που ενδιαφερόμαστε για τη διατήρηση της βιοποικιλότητας, είναι καλύτερο να κάνουμε χρήση ασφαλών κανόνων (*safety rules*), οι οποίοι εγγυούνται, ότι όταν εφαρμοστούν κάποια είδη δεν θα οδηγηθούν σε εξαφάνιση.²⁴ Οι ασφαλείς κανόνες στη διαχείριση βιοποικιλότητας χρήζουν ιδιαίτερης σημασίας όταν ο διαχειριστής του οικοσυστήματος δεν είναι σίγουρος για το αρχικό μοντέλο αναφοράς του και δεν μπορεί με σιγουριά να ελέγξει τους κινδύνους από τα μη προβλέψιμα γεγονότα και ακραία σενάρια τα οποία ίσως εμφανιστούν. Επειδή όμως αυτά τα ακραία σενάρια συμβαίνουν στην πραγματικότητα, η διαχείριση οικοσυστημάτων και η διατήρηση της βιοποικιλότητας σχετίζονται με μία ιδέα προφύλαξης (*precautionary principle*), ώστε να μην οδηγηθούμε σε εξάλειψη ειδών.

Αφού, όμως, στην πραγματικότητα τα είδη συχνά οδηγούνται σε εξαφάνιση λόγω ενεργειών που σχετίζονται με τη διαχείριση του οικοσυστήματος, στόχος είναι να αναπτύξουμε κανόνες σύμφωνα με τους οποίους διατηρούμε τη βιοποικιλότητα σε ένα περιβάλλον, όπου εκεί τα είδη καλλιεργούνται και αλιεύονται και αντιμετωπίζουμε καταστάσεις κάτω από βεβαιότητα όσο και αβεβαιότητα.²⁵ Ειδικότερα, στη δεύτερη περίπτωση αντιμετωπίζουμε τόσο την κατάσταση εκείνη όπου αποστρεφόμεστε τον κίνδυνο όσο και εκείνη όπου αποστρεφόμεστε την αβεβαιότητα, όπου εισάγουμε την έννοια της προφύλαξης και βλέπουμε πως αυτή επιδρά στο σχηματισμό των κανόνων στην περίπτωση αποστροφής στην αβεβαιότητα.

Το πρώτο μέρος της ανάλυσης σχετικά με τη διαχείριση οικοσυστημάτων έχει δομηθεί ως εξής: Αρχικά παρουσιάζουμε ένα ντετερμινιστικό μοντέλο με δύο είδη, όπου επιτρέπουμε αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ειδών, το οποίο χρησιμοποιούμε ως όχημα για την εισαγωγή ενός πιο πολύπλοκου μοντέλου στη συνέχεια. Ειδικότερα, παρακάτω, επεκτείνουμε το υπόδειγμα εισάγοντας αβεβαιότητα και αποδεικνύουμε άνω και κάτω φράγματα για τις πιθανότητες των δύο βιομαζών να είναι σε υψηλότερα επίπεδα από μία προαποφασισμένη

²⁴Για μία γενική συζήτηση αναφορικά με το ρόλο της οικονομικής ανάλυσης στην ανάπτυξη περιβαλλοντολογικής υγείας και ασφαλής ρύθμισης, δείτε Arrow et al. [5]. Αναφορικά με τα πρότυπα στην προστασία των ειδών δείτε: Holt Tisdell [42].

²⁵Δείτε Regan et. al. , [61], για τη διαχείριση βιοποικιλότητας σε πληθυσμιακά μοντέλα.

αναλογία των αρχικών βιομαζών. Τα άνω και κάτω φράγματα εξαρτιούνται καθοριστικά από την επιλογή των κανόνων αλιείας και την κατανομή γης και αποτελούν τους ασφαλείς μας κανόνες για τη διατήρηση της βιοποικιλότητας. Έπειτα επεκτείνουμε το υπόδειγμα στην περίπτωση n το πλήθος βιομαζών όπου αποδεικνύουμε τη μορφή των φραγμάτων στην γενική περίπτωση. Στη συνέχεια θεωρώντας ότι αυτός που καλείται να λάβει μία απόφαση αντιμετωπίζει αβεβαιότητα κατά *Knight* αναφορικά με το αρχικό μοντέλο αναφοράς του, υιοθετώντας την *k – Ignorance* μεθοδολογία η οποία είναι σε συνέπεια με το αξίωμα της αποστροφής της αβεβαιότητας, δείχνουμε πως επηρεάζεται ο καθορισμός των παραπάνω φραγμάτων. Η διάφορα στις τιμές των φραγμάτων στις δύο περιπτώσεις μπορεί να ερμηνευθεί σαν ένα μέτρο της precautionary principle, στη διαχείριση βιοποικιλότητας.

Το παραπάνω αποτελεί την πρώτη εφαρμογή σχετικά με την διαχείριση οικοσυστημάτων. Στο κεφάλαιο 8 παρουσιάζουμε τη δεύτερη εφαρμογή μας.

Στην εφαρμογή αυτή, σε αντίθεση με την πρώτη κάνουμε χρήση εννοιών βελτιστοποίησης. Εδώ, προσπαθούμε να προστατευτούμε απέναντι στην άγνοια και την αβεβαιότητα, η οποία τώρα έχει διατυπωθεί με τη χρήση της ϵ – contamination προσέγγισης, που σε συνδυασμό με κακές αποφάσεις διαχείρισης και ακραία φαινόμενα είναι πιθανό να προκαλέσουν εξαφάνιση ειδών,²⁶ διαταράσσοντας έτσι με τον τρόπο αυτό τη λειτουργία του οικοσυστήματος, η οποία βασίζεται πάνω στη βιοποικιλότητα, όπως έχει επισημανθεί και από την πρόσφατη αναφορά του ΜΕΑ, [55].

Ειδικότερα αφού εισάγουμε ένα στατικό μοντέλο με δύο βιομάζες, επεκτείνουμε αυτό σε δυναμικό, όπου αναλύουμε ένα ιδιωτικά και ένα κοινωνικά βέλτιστο πρόβλημα τόσο στην κλασική περίπτωση αποστροφής κινδύνου όσο και αποστροφής στην αβεβαιότητα, όπου και εξετάζουμε πως οι αποφάσεις μας επηρεάζονται κάτω από την ύπαρξη άγνοιας και αβεβαιότητας. Εδώ και πάλι οι διαφορές στις τιμές ανάμεσα στις δύο περιπτώσεις μπορούν να παρασταθούν σαν ένα μέτρο προφύλαξης απέναντι στην αβεβαιότητα. Τέλος εξετάζοντας ένα ρυθμιστικό πρόβλημα, γράφουμε τη λύση αυτού σε μία μορφή όπου οι παράμετροι που δείχνουν το κατά πόσο πιστεύουμε στο αρχικό μοντέλο έχουν ενδογενοποιηθεί.

Στο πρώτο μέρος, λοιπόν, στο επόμενο κεφάλαιο, για να προστατευτούμε απέναντι στην επίδραση της αβεβαιότητας και των ακραίων σεναρίων, τα οποία πιθανόν να προκαλέσουν εξαφάνιση πολλών ειδών, αναπτύσσουμε ασφαλείς κανόνες για τη διατήρηση της βιοποικιλότητας. Αυτοί οι κανόνες μπορούν να πάρουν τη μορφή σταθερών κανόνων κατανομής γης και κανόνων αλιείας. Εδώ, ερευνούμε πως η αβεβαιότητα ως προς το μοντέλο αναφοράς επηρεάζει αυτούς τους κανόνες και πως ένα μέτρο πρόληψης ενάντια στα ακραία φαινόμενα μπορεί να διατυπωθεί.

²⁶ Δείτε για παράδειγμα *Holling* [40], [41].

7 Κανόνες διατήρησης της βιοποικιλότητας κάτω από αβεβαιότητα

Στο κεφάλαιο αυτό θα αποδείξουμε ασφαλείς κανόνες για τη διατήρηση της βιοποικιλότητας, λαμβάνοντας υπόψη την ύπαρξη αβεβαιότητας αναφορικά με την εξέλιξη των τιμών των βιομαζών. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε πως επηρεάζονται αυτοί οι κανόνες όταν ο διαχειριστής του οικοσυστήματος αποστρέφεται την αβεβαιότητα κατά *Knigh*t. Εδώ, δε θα κάνουμε χρήση εννοιών βελτιστοποίησης.

7.1 Διατήρηση της βιοποικιλότητας

Στο κεφάλαιο αυτό αρχικά θα παρουσιάσουμε ένα ντετερμινιστικό μοντέλο δύο βιομαζών με αλληλεπιδράσεις, το οποίο θα επεκτείνουμε στην συνέχεια εισάγοντας αβεβαιότητα και έπειτα θα γενικεύσουμε αυτό στην περίπτωση n το πλήθος βιομαζών.

7.1.1 Ένα ντετερμινιστικό μοντέλο με αλληλεπιδράσεις

Θεωρούμε ένα τοπίο το οποίο έχει κανονικοποιηθεί ως προς τη μονάδα και όπου δύο είδη δύναται να συνυπάρχουν. Έστω, B_i για $i=1,2$ οι αρχικές βιομάζες των δύο ειδών. Στην περίπτωση αυτή η εξέλιξη των αρχικών βιομαζών $B_{1\tau}, B_{2\tau}$, μέσα στο χρόνο δύναται να περιγράφει από το παρακάτω σύστημα των ντετερμινιστικών διαφορικών εξισώσεων:²⁷

$$\begin{aligned} dB_1 &= B_1[f_1(\mathbf{w}) - d_1]d\tau - a_{12}B_2d\tau - h_1d\tau \\ dB_2 &= B_2[f_2(\mathbf{w}) - d_2]d\tau - a_{21}B_1d\tau - h_2d\tau, \end{aligned} \quad (7.1)$$

το οποίο μπορεί να ξαναγράφει ως:

$$dB/d\tau = AB - h,$$
$$A = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{w}) - d_1 & -a_{12} \\ -a_{21} & f_2(\mathbf{w}) - d_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

Στην παραπάνω εξίσωση $f_i(\mathbf{w}) - d_i$, $i = 1, 2$, είναι οι καθαροί από θάνατους ρυθμοί ανάπτυξης, με $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ συμβολίζουμε την κατανομή γης μεταξύ των δύο ειδών, με $(\mathbf{h} = (h_1, h_2))$ τους ρυθμούς αλιείας²⁸ και τέλος τα a_{12} και a_{21} αναφέρονται στους συντελεστές αλληλεπίδρασης όπως στον *Vandermeer*,

²⁷ Δείτε τις εργασίες των Brock Χερραπέα [13] και Benyes [6].

²⁸ Ο όρος αλιεία που αναφέρεται παρακάτω στην παρούσα διατριβή αφορά στον αγγλικό όρο *harvesting*, που μπορεί να αναφέρεται και σε φυτά.

[74]. Αρχικά, θεωρώντας την εξίσωση:

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow [f_1(\mathbf{w}) - d_1 - \lambda][f_2(\mathbf{w}) - d_2 - \lambda] - a_{12}a_{21} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{12} = \frac{+[(f_1(\mathbf{w}) - d_1) + (f_2(\mathbf{w}) - d_2)] \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\Delta = [(f_1(\mathbf{w}) - d_1) + (f_2(\mathbf{w}) - d_2)]^2 + 4(f_1(\mathbf{w}) - d_1)(f_2(\mathbf{w}) - d_2)a_{12}a_{21}$$

υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές λ_1, λ_2 του πίνακα A . Με κατάλληλη επιλογή των τιμών (\mathbf{w}, \mathbf{h}) μπορούμε να πετύχουμε τα παρακάτω:

- Αρνητικές χαρακτηριστικές ρίζες $\lambda_i, i = 1, 2$,
- Να έχουμε μία λύση του παραπάνω 2×2 συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων που ικανοποιεί:

$$B_{1t} \geq \bar{B}_1, B_{2t} \geq \bar{B}_2$$

όπου $(\bar{B}_1, \bar{B}_2) > 0$ είναι κάποια προαποφασισμένα επιθυμητά επίπεδα. Αυτή η λύση έχει την μορφή: $(B_{1t}, B_{2t}) = \Omega e^{\Lambda t} c - A^{-1}h$, με Ω να είναι ο πίνακας των χαρακτηριστικών διανυσμάτων x ($Ax = \lambda x$), και $e^{\Lambda t}$ ένας διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία $e^{\lambda_i t}$, με $c = \Omega^{-1}B_0 + \Omega^{-1}A^{-1}h$ ένα διάνυσμα από σταθερές το οποίο υπολογίζουμε κάνοντας χρήση των αρχικών συνθηκών, (B_0 είναι ένας δοσμένος πίνακας με τις αρχικές τιμές των δύο βιομαζών),

- καθώς το t αυξάνει οι οριακές τιμές, $(B_1, B_2) = -A^{-1}h$, είναι μεγαλύτερες με την σειρά τους από αυτά τα προαποφασισμένα επίπεδα τιμών.

Αν οι παραπάνω συνθήκες ικανοποιούνται, τότε έχουμε ότι, στην απλή ντετερμινιστική περίπτωση επιτυγχάνουμε θετικές βιομάζες για όλα τα είδη σε όλες τις χρονικές στιγμές. Επιλέγοντας, λοιπόν, κατάλληλα τις τιμές των μεταβλητών ελέγχου του συστήματος μας (w_1, w_2, h_1, h_2) μπορούμε να έχουμε ασφαλείς κανόνες για τη διατήρηση της βιοπικιολότητας στο τοπίο.

Το παραπάνω μοντέλο, είναι ένα σχετικά απλό μοντέλο το οποίο χρησιμοποιούμε σαν όχημα για την εισαγωγή ενός πιο κατάλληλου μοντέλου για τη μελέτη της βιοπικιολότητας. Ένα πιο ενδιαφέρον και περισσότερο ρεαλιστικό είναι αυτό το οποίο εξετάζεται στο παρακάτω υποκεφάλαιο, όπου ο διαχειριστής του τοπίου λαμβάνει υπόψη την αβεβαιότητα αναφορικά με την εξέλιξη των δύο βιομαζών μέσα στο χρόνο.

7.1.2 Αβεβαιότητα και διαχείριση βιοπικιολότητας

Επομένως, σε αυτό το υποκεφάλαιο επεκτείνοντας το μοντέλο μας εισάγοντας αβεβαιότητα, το οποίο είναι ένα καλύτερο ξεκίνημα για να μελετήσουμε τη

βιοπικιολότητα, αποδεικνύουμε ασφαλείς κανόνες για τη διατήρηση της βιοπικιολότητας, αρχικά στην περίπτωση 2 βιομαζών και έπειτα στη γενική περίπτωση με n το πλήθος.

Στην περίπτωση λοιπόν αυτή, οι αρχικές βιομάζες B_{10}, B_{20} , μέσα στο χρόνο εξελίσσονται βάσει του παρακάτω συστήματος στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.

$$\begin{aligned} dB_1 &= B_1[f_1(\mathbf{w}) - d_1]dt - a_{12}B_2dt - h_1dt - \sigma_1(\mathbf{w})dz_1 \\ dB_2 &= B_2[f_2(\mathbf{w}) - d_2]dt - a_{21}B_1dt - h_2dt - \sigma_2(\mathbf{w})dz_2 \end{aligned} \quad (7.2)$$

με τις παράμερους να ορίζονται όπως παραπάνω. Με $\sigma_i^2(\mathbf{w}) > 0$ συμβολίζουμε τη διακύμανση ανά μονάδα χρόνου και με dz_1, dz_2 δύο συσχετισμένες *Brownian* κινήσεις και έστω ρ ο μεταξύ τους συντελεστής συσχέτισης. Στο παραπάνω σύστημα (7.2), σε κάθε μία από τις δύο εξισώσεις υπάρχει ένας επιπλέον όρος συγκριτικά με τις αντίστοιχες εξισώσεις που χρησιμοποιήθηκαν στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, ο οποίος χρησιμοποιείται για να εισάγουμε αβεβαιότητα ως προς το χώρο καταστάσεων, στο προηγούμενο ντετερμινιστικό μοντέλο.

Χρησιμοποιώντας συμβολισμό πινάκων η εξίσωση (7.2), δύναται να ξαναγράφει ως:

$$\begin{aligned} dB &= ABdt - hdt + \Sigma dZ \quad \text{where} \\ dB &= \begin{bmatrix} dB_1 \\ dB_2 \end{bmatrix}, \\ A &= \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{w}) - d_1 & -a_{12} \\ -a_{21} & f_2(\mathbf{w}) - d_2 \end{bmatrix}, \\ \Sigma &= \begin{bmatrix} -\sigma_1(\mathbf{w}) & 0 \\ 0 & -\sigma_2(\mathbf{w}) \end{bmatrix}, h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \\ dZ &= \begin{bmatrix} dz_1 \\ dz_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (7.3)$$

Η παραπάνω εξίσωση (7.3), πολλαπλασιαζόμενη από αριστερά από ένα κατάλληλο πίνακα χρησιμοποιώντας το δισδιάστατο κανόνα του *Ito* (δες *Oksedall* [56], Θεωρ. 4.2.1 σελ. 48), γίνεται: ²⁹

²⁹ Στην περίπτωση μας F είναι ο πίνακας $-At$, όπου φυσικά τα στοιχεία του συγκλίνουν σε κάποιο πραγματικό αριθμό. Αυτό, ισχύει επειδή κάθε ένα από τα στοιχεία αυτού του πίνακα είναι φραγμένο άνω από το άθροισμα $a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{k!} (-tq)^k$, με q να είναι το μεγαλύτερο εκ των τεσσάρων στοιχείων του πίνακα A στην εξίσωση (7.3). Για τον παραπάνω γενικό όρο ισχύει ένα γνωστό κριτήριο σύγκλισης: $\limsup \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$ και άρα, επομένως, η σειρά συγκλίνει.

$$d(e^{-At}B_t) = e^{-At}dB - e^{-At}ABdt = -e^{-At}hdt + e^{-At}\Sigma dZ, \quad (7.4)$$

$$\text{με } e^F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} F^n = F + \frac{1}{2!} F^2 + \frac{1}{3!} F^3 + \dots \quad (7.5)$$

$$F = -At \quad (7.6)$$

Ισοδύναμα:

$$e^{-At}B_t - B_0 = -\int_0^t e^{-As}h_s ds + \int_0^t e^{-As}\Sigma dZ_s$$

$$B_t = e^{At}B_0 - \int_0^t e^{A(t-s)}h_s ds + \int_0^t e^{A(t-s)}\Sigma dZ_s \quad (7.7)$$

$$\text{με } B_0 = \begin{bmatrix} B_{10} \\ B_{20} \end{bmatrix}.$$

όπου έστω:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

με A_i για $i = 1, \dots, 4$, να εξαρτιούνται από τις τιμές των συντελεστών αλληλεπίδρασης a_{ij} , καθώς επίσης από τα f_i, h_i , που μπορούμε να υπολογίσουμε βάσει της (7.5). Επομένως, κάνοντας χρήση των σχέσεων (7.7), (7.8), λαμβάνουμε ότι:

$$B_{1t} = A_1 B_{10} + A_2 B_{20} + g_1(h_1, h_2) + \int_0^t G_1 dZ_1 + \int_0^t G_2 dZ_2, \quad (7.9)$$

$$B_{2t} = A_3 B_{10} + A_4 B_{20} + g_2(h_1, h_2) + \int_0^t G_3 dZ_1 + \int_0^t G_4 dZ_2. \quad (7.10)$$

με G_i να είναι συναρτήσεις των f_i, h_i , και σ_i , με την ιδιότητα να ανήκουν στην κλάση $V = V(0, T)$.³⁰³¹ Τα τέσσερα ολοκληρώματα στις δύο παραπάνω εξισώσεις είναι στοχαστικά ολοκληρώματα, με την ιδιότητα για όλους τους πιθανούς συνδυασμούς των i, j

$$E \int_0^t G_i dZ_j = 0. \quad (7.11)$$

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι ο διαχειριστής του τοπίου ανησυχεί για τη διατήρηση της βιοποικιλότητας η καλύτερα ο σχεδιαστής ενδιαφέρεται για την

³⁰Οι ποσότητες $g_1(h_1, h_2), g_2(h_1, h_2)$ οφείλονται στα ολοκληρώματα $\int_0^t e^{A(t-s)}h_s ds$.

³¹ V είναι το σύνολο των μετρήσιμων προσαρμοσμένων συναρτήσεων f με την ιδιότητα $E \int_0^T f(t, \omega)^2 dt < \infty$. Τότε, για το αντίστοιχο στοχαστικό ολοκλήρωμα ισχύει ότι: $E \int_0^T f(t, \omega) dZ_t = 0$.

αιφορεία του συστήματος και επιθυμεί την διατήρηση των βιομαζών σε υψηλότερα επίπεδα από κάποιο ποσοστό, έστω το $\frac{1}{n}$ των αρχικών τιμών. Κάνοντας χρήση των (7.9) και (7.10), εξαιτίας της (7.11) και του γεγονότος ότι οι τιμές των βιομαζών είναι φραγμένες από τις αρχικές τους τιμές, χρησιμοποιώντας συνηθισμένους χειρισμούς από τη θεωρία πιθανοτήτων, είμαστε σε θέση να λάβουμε άνω και κάτω φράγματα ως προς το ενδεχόμενο οι βιομάζες να είναι σε υψηλότερα από τα επιθυμητά επίπεδα. Τότε έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \left(A_1 + \frac{A_2}{l} + \frac{g_1}{B_{10}}\right) - \frac{1}{n} &\leq \Pr(B_{1t} > \frac{1}{n}B_{10}) \leq \frac{n}{B_{10}}(A_1B_{10} + A_2B_{20} + g_1) \\ &= n\left(A_1 + \frac{A_2}{l} + \frac{g_1}{B_{10}}\right) \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} \left(lA_3 + A_4 + \frac{g_2}{B_{20}}\right) - \frac{1}{n} &\leq \Pr(B_{2t} > \frac{1}{n}B_{20}) \leq \frac{n}{B_{20}}(A_3B_{10} + A_4B_{20} + g_2) \\ &= n\left(lA_3 + A_4 + \frac{g_2}{B_{20}}\right) \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$\text{όπου } l = \frac{B_{10}}{B_{20}}$$

Από τα παραπάνω αποτελέσματα εξαιτίας του ότι κάθε μία από τους ποσότητες είναι της μορφής $A_i = A_i(w_1, w_2, h_1, h_2)$, βλέπουμε ότι η συμπεριφορά του διαχειριστή και τα σχετικά φράγματα εξαρτιούνται καθοριστικά στα ποσοστά w_i καθώς επίσης και την επιλογή των κανόνων αλιείας h_i . Επομένως, ο διαχειριστής του οικοσυστήματος μπορεί κατάλληλα να καθορίσει τις παραπάνω ποσότητες ώστε να επιτύχει τα επιθυμητά επίπεδα τιμών και την ικανοποίηση των σχετικών ανισοτήτων.³² Επομένως με τις τιμές των παραμέτρων αν ορίζονται όπως παραπάνω έχουμε την παρακάτω Πρόταση:

Πρόταση 7.1.1 *Δοθέντος μίας αρχικής κατανομής γης και ενός κανόνα αλιείας (w_1, w_2, h_1, h_2) , τα άνω και κάτω φράγματα έτσι ώστε οι πιθανότητες των βιομαζών των δύο ειδών 1, 2, να είναι σε υψηλότερα επίπεδα από το $\frac{1}{n}$ των αρχικών τους τιμών, δίνονται από τις εξισώσεις (7.12) και (7.13) αντίστοιχα.*

Άρα η κατανομή γης και ο κανόνας αλιείας (w_1, w_2, h_1, h_2) ο οποίος ικανοποιεί την παραπάνω πρόταση, είναι ένας ασφαλής κανόνας ο οποίος εγγυάται τη διατήρηση των βιομαζών πάνω από το $\frac{1}{n}B_{i0}$, $i = 1, 2$, με την πιθανότητα αυτού του γεγονότος να φράσσεται άνω και κάτω από συγκεκριμένες τιμές.

7.1.3 Η γενική περίπτωση n ειδών

Το μοντέλο μας δύναται να επεκταθεί στην περίπτωση με n το πλήθος βιομάζες, οπότε η γενική εξίσωση που περιγράφει την εξέλιξη του k είδους δίνεται από

³²Για τον καθορισμό των τιμών των στοιχείων A_i , απαιτείται χρήση αριθμητικών μεθόδων που δεν είναι στους στόχους της παρούσας εργασίας.

την παρακάτω εξίσωση:

$$dB_k = B_k[f_k(\mathbf{w}) - d_k]dt - h_k dt - \sum_{\substack{j \neq k \\ j=1, \dots, n}} a_{kj} B_j dt - \sigma_k(\mathbf{w}) dz_k \quad k = 1, \dots, n \quad (7.14)$$

με $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ να είναι ο κανόνας κατανομής γης. Χρησιμοποιώντας συμβολισμό πινάκων το αντίστοιχο σύστημα εξισώσεων γίνεται:

$$dB = ABdt - hdt + \Sigma dZ \quad \text{όπου} \quad (7.15)$$

$$dB = \begin{bmatrix} dB_1 \\ \dots \\ dB_n \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{w}) - d_1 & -a_{12} & \dots & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & f_2(\mathbf{w}) - d_2 & \dots & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \dots & f_n(\mathbf{w}) - d_n \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} -\sigma_1(\mathbf{w}) & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_n(\mathbf{w}) \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \dots \\ h_n \end{bmatrix}$$

$$dZ = \begin{bmatrix} dZ_1 \\ \dots \\ dZ_n \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζοντας την ίδια μεθοδολογία όπως παραπάνω έχουμε ότι:

$$B(t) = e^{At} B_0 - \int_0^t e^{A(t-s)} h_s ds + \int_0^t e^{A(t-s)} \Sigma dZ_s$$

$$\text{όπου τώρα } B_0 = \begin{bmatrix} B_{10} \\ \dots \\ B_{n0} \end{bmatrix}$$

με τον εκθετικό πίνακα να είναι τώρα ο $n \times n$:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & A_{kj} & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Επομένως η k βιομάζα δίνεται από την:

$$B_{kt} = \sum_{i=1}^n A_{ki} B_{i0} + g_k(h_1, \dots, h_n) + \sum_{i=1}^n \int_0^t G_i dZ_i \quad k = 1, \dots, n$$

και τα αντίστοιχα άνω και κάτω φράγματα από την παρακάτω εξίσωση:

$$\left(\frac{A_1}{l_{1k}} + A_k + \frac{A_n}{l_{nk}} + \frac{g_k}{B_{k0}}\right) - \frac{1}{\gamma} \leq \Pr(B_{kt} > \frac{1}{\gamma} B_{k0}) \leq \gamma \left(\frac{A_1}{l_{1k}} + A_k + \frac{A_n}{l_{nk}} + \frac{g_k}{B_{k0}}\right)$$

$$\text{με } l_{jk} = \frac{B_{k0}}{B_{j0}} \quad k = 1, \dots, n \quad j \neq k \quad (7.16)$$

Επομένως με τις τιμές των παραμέτρων να ορίζονται όπως παραπάνω έχουμε αποδείξει ότι:

Πρόταση 7.1.2 *Οι ασφαλείς κανόνες κατανομής γης και αλιείας δηλαδή οι: $(w_1, \dots, w_n; h_1, \dots, h_n)$, ορίζουν άνω και κάτω φράγματα που δίνονται από την εξίσωση (7.16), των πιθανοτήτων των βιομαζών κάθε ενός εκ των n ειδών να είναι σε υψηλότερα επίπεδα από το $\frac{1}{\gamma}$ των αρχικών τιμών.*

7.2 Ασφαλείς κανόνες κάτω από αβεβαιότητα κατά Knight

Υποθέτουμε παρακάτω ότι αυτός που καλείται να λάβει μία απόφαση δεν είναι σίγουρος για το μοντέλο αναφοράς του και αντιμετωπίζει αβεβαιότητα κατά Knight. Το σύστημα των εξισώσεων που δίνεται από την (7.3), τώρα μπορεί να γραφεί σαν:

$$dB = ABdt - hdt + \Sigma RdZ \quad \text{όπου} \quad (7.17)$$

$$dB = \begin{bmatrix} dB_1 \\ dB_2 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{w}_1) - d_1 & -a_{12} \\ -a_{21} & f_2(\mathbf{w}_2) - d_2 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} -\sigma_1 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1 - \rho^2} \end{bmatrix}$$

$$h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, \quad dZ = \begin{bmatrix} dZ_1 \\ dZ_2 \end{bmatrix}$$

όπου ρ είναι ο συντελεστής συσχέτισης ανάμεσα στις δύο *brownian* κινήσεις στο αρχικό σύστημα (7.3), και dZ_1, dZ_2 είναι δύο ανεξάρτητες κινήσεις *brown*. Υιοθετώντας την ορολογία του ευσταθούς ελέγχου, θεωρούμε μετρήσιμες διαταραχές. Ειδικότερα οι αρχικές κινήσεις *brown*, $dZ_i \quad i = 1, 2$, αντικαθίστανται από τις:

$$Z_i(t) = \widehat{Z}_i(t) + \int_0^t \varepsilon_i(s) ds, \quad i = 1, 2, \quad (7.18)$$

όπου \widehat{Z}_i είναι κάποιες άλλες κινήσεις *brown* και ε_i μετρήσιμες συναρτήσεις. Κάνοντας αυτό, το σύστημα (7.17) παίρνει την μορφή:

$$dB = ABdt - hdt + \Sigma RE dt + \Sigma Rd\widehat{Z} \quad \text{όπου}$$

$$E = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

Εφαρμόζοντας την ίδια μεθοδολογία όπως παραπάνω, το παραπάνω σύστημα ισοδύναμα γράφεται ως:

$$\begin{aligned} d(e^{-At}B_t) &= e^{-At}dB - e^{-At}ABdt = -e^{-At}hdt + e^{-At}\Sigma R d\widehat{Z}, \quad (7.20) \\ e^{-At}B_t - B_0 &= -\int_0^t e^{-As}h_s ds + \int_0^t e^{-As}\Sigma R E ds + \int_0^t e^{-As}\Sigma R d\widehat{Z}_s \\ B_t &= e^{At}B_0 - \int_0^t e^{A(t-s)}h_s ds + \int_0^t e^{A(t-s)}\Sigma R D ds + \int_0^t e^{A(t-s)}\Sigma R d\widehat{Z}_s \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω εξίσωση με την (7.7), βλέπουμε, ότι υπάρχει επιπλέον ένας όρος $\int_0^t e^{A(t-s)}\Sigma R E dt$ ο οποίος δρα σαν ένα μέτρο πρόληψης και αντικατοπτρίζει την επίδραση της αποστροφής στην αβεβαιότητα. Αυτό, έχει σαν αποτέλεσμα την εισαγωγή δύο νέων όρων σε κάθε μία από τις (7.9), (7.10) αντίστοιχα. Επομένως, τα άνω και κάτω φράγματα αλλάζουν βάσει των τιμών των παραμέτρων του προβλήματος.

Στο παραπάνω μοντέλο, αφότου θεωρήσουμε τις διαταραχές το αρχικό μέτρο πιθανότητας P αντικαθίσταται από ένα άλλο μέτρο Q . Η απόσταση μεταξύ αυτών των δύο μέτρων δίνεται από τη σχετική εντροπία, όπου στην περίπτωση που θεωρήσουμε την $k - ignorance$ μεθοδολογία, δίνεται από την $R(Q//P) = \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} E_Q[\frac{1}{2}\varepsilon_t^2] dt$, όπου ο περιορισμός στην εντροπία: ³³ $Q(\tau) = \{Q : E_Q[\frac{1}{2}\varepsilon_t^2] \leq \tau, \text{ για κάθε } t\}$ περιορίζει το σύνολο των μοντέλων τα οποία το άτομο που λαμβάνει αποφάσεις θεωρεί κάθε στιγμή. Στην περίπτωση αυτή η χειρότερη διαταραχή εύκολα υπολογίζεται ότι είναι η:

$$\varepsilon_{it}^* = -\sqrt{2\tau_i}$$

Εφαρμόζοντας αυτή την προσέγγιση, οι διαταραχές είναι αρνητικοί σταθεροί αριθμοί και επομένως αρχικά υπολογίζουμε το νέο ολοκλήρωμα και έπειτα τα νέα φράγματα. Ειδικότερα, εξετάζοντας τις πιθανές περιπτώσεις των προσήμων του πίνακα που οφείλεται στο $\int_0^t e^{A(t-s)}\Sigma R E dt$, λαμβάνουμε ότι:

$$\begin{aligned} e^{A(t-s)} &= \begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} - & 0 \\ 0 & - \end{bmatrix}, e^{A(t-s)}\Sigma = \begin{bmatrix} - & + \\ + & - \end{bmatrix} \\ R &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix}, E^* = \begin{bmatrix} -\sqrt{2\tau_1} \\ -\sqrt{2\tau_2} \end{bmatrix} \\ RE^* &= \begin{bmatrix} -\sqrt{2\tau_i} \\ -\sqrt{2\tau_1}\rho - \sqrt{2\tau_2}\sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix} \\ e^{A(t-s)}\Sigma RE^* &= \begin{bmatrix} \text{positive} - (\sqrt{2\tau_1}\rho + \sqrt{2\tau_2}\sqrt{1-\rho^2})\text{positive} \\ \text{negative} + (\sqrt{2\tau_1}\rho + \sqrt{2\tau_2}\sqrt{1-\rho^2})\text{positive} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

όπου εκεί που εμφανίζεται *positive* σημαίνει ότι υπάρχει κάποια θετική ποσότητα και αντίστοιχα εκεί όπου εμφανίζεται *negative* αρνητική. Επομένως, από

³³ Αυτό είναι σε αντίθεση με την μεθοδολογία του robust control, όπου θεωρούμε ένα παντοτινό περιορισμό.

την τελευταία εξίσωση λαμβάνουμε ότι: Στην περίπτωση όπου ο όρος $(\sqrt{2\tau_1}\rho + \sqrt{2\tau_2}\sqrt{1-\rho^2})$ είναι αρνητικός το πρώτο στοιχείο του πίνακα είναι θετικό και το δεύτερο αρνητικό, (όπου όταν $\tau_1 = \tau_2$ αυτό λαμβάνει χώρα όταν $\rho + \sqrt{1-\rho^2} < 0 \iff \rho < -\frac{\sqrt{2}}{2}$)³⁴, τότε οι σχέσεις (7.12) και (7.13) γίνονται:

$$p + \left(A_1 + \frac{A_2}{l} + \frac{g_1}{B_{10}}\right) - \frac{1}{n} \leq \Pr(B_{1t} > \frac{1}{n}B_{10}) \leq n\left(A_1 + \frac{A_2}{l} + \frac{g_1}{B_{10}}\right) + p$$

$$n + \left(lA_3 + A_4 + \frac{g_2}{B_{20}}\right) - \frac{1}{n} \leq \Pr(B_{2t} > \frac{1}{n}B_{20}) \leq n\left(lA_3 + A_4 + \frac{g_2}{B_{20}}\right) + n$$

με $l = \frac{B_{10}}{B_{20}}, p = \text{positive}, n = \text{negative}.$

Επομένως, μπορούμε να δούμε από την παραπάνω εξίσωση ότι για ένα διαχειριστή ο οποίος αποστρέφεται την αβεβαιότητα, τότε για δοσμένη κατανομή γης και ασφαλών κανόνων αλιείας, τα φράγματα για τη διατήρηση της βιοπικιλότητας που αντιστοιχούν στην περίπτωση αποστροφής στην αβεβαιότητα είναι διαφορετικά από τα παραπάνω που αντιστοιχούσαν στην περίπτωση αποστροφής στον κίνδυνο. Ειδικότερα, στην περίπτωση όπου: $\sqrt{2\tau_1}\rho + \sqrt{2\tau_2}\sqrt{1-\rho^2} < 0$ για την πρώτη από τις δύο βιομάζες το άνω και κάτω φράγμα είναι υψηλότερα, ενώ για τη δεύτερη είναι χαμηλότερα, συγκρινόμενα με τα φράγματα που δίνονται στην περίπτωση παραπάνω που αντιστοιχεί στην κλασική αποστροφή στον κίνδυνο. Εδώ, αξίζει να σημειωθεί ότι το αποτέλεσμα είναι σε συμφωνία με τα αποτελέσματα μας αναφορικά με τη διαχείριση χαρτοφυλακίου, όπου μπορούσαμε να βρούμε συνθήκες, σύμφωνα με τις οποίες γινόμαστε επιθετικότεροι σε σχέση με την κλασική περίπτωση, στη μία μόνο από τις δύο αξίες. Έτσι και εδώ στη μία βιομάζα τα φράγματα αυξάνουν και στην άλλη μειώνονται ως προς το κλασικό μοντέλο αποστροφής κίνδυνου.

Στον πίνακα που ακολουθεί βλέπουμε συνοπτικά πως επιδρά στο άνω και κάτω φράγμα η ύπαρξη αβεβαιότητας σε σχέση με το μοντέλο αναφοράς στην περίπτωση που ικανοποιείται η συνθήκη $(\sqrt{2\tau_1}\rho + \sqrt{2\tau_2}\sqrt{1-\rho^2})$:

	Κάτω Φράγμα	Άνω Φράγμα
Βιομάζα 1	↑	↑
Βιομάζα 2	↓	↓

Στη συνέχεια, σε αντίθεση με την παραπάνω εφαρμογή θα κάνουμε χρήση εννοιών βελτιστοποίησης και θα αναπτύξουμε ένα δυναμικό μοντέλο για τη διαχείριση της βιοπικιλότητας κάτω από άγνοια και αβεβαιότητα, ως προς το μοντέλο αναφοράς. Το παρακάτω μοντέλο, έχει κατασκευαστεί για να λάβει υπόψη την ύπαρξη άγνοιας και αβεβαιότητας, η οποία όταν συνδυαστεί με μη ρυθμιστικές αποφάσεις ίσως προκαλέσει εξαφάνιση αρκετών ειδών. Επίσης, εξετάζουμε πως η ύπαρξη αβεβαιότητας επηρεάζει τα βέλτιστα επίπεδα βιομαζών

³⁴Στην περίπτωση όπου αυτή η συνθήκη δεν ικανοποιείται, δεν είμαστε σε θέση να αποδείξουμε ένα παρόμοιο αποτέλεσμα.

που πρέπει να διατηρήσουμε στο οικοσύστημα και τις αντίστοιχες προσπάθειες που πρέπει να καταβάλουμε για να επιτύχουμε αυτά, όπου και διατυπώνουμε την ύπαρξη ενός μέτρου πρόληψης ενάντια στην άγνοια και την αβεβαιότητα. Τέλος, θεωρώντας ένα ρυθμιστικό πρόβλημα, η λύση αυτού γράφεται σε μορφή όπου οι παράμετροι ε που δηλώνουν την εμπιστοσύνη μας στο αρχικό μοντέλο έχουν ενδογενοποιηθεί.

8 Διαχείριση βιοπικιολότητας: Αβεβαιότητα και πρόληψη

Αρχικά, στο πρώτο υποκεφάλαιο εισάγουμε ένα στατικό μοντέλο και αντιμετωπίζουμε ένα πρόβλημα διαχείρισης βιοπικιολότητας με δύο είδη τα οποία δύναται να συνυπάρχουν σε ένα τοπίο. Κάνοντας χρήση της *e-contamination*, προσέγγισης των Epstein και Wang, αποδεικνύουμε ότι η αποστρόφη στην αβεβαιότητα μπορεί να οδηγήσει σε αντιστροφή της απόφασης του κοινωνικού σχεδιαστή σε σύγκριση με την περίπτωση αποστρόφης κινδύνου.

8.1 Αποστρόφη στην αβεβαιότητα και διαχείριση βιοπικιολότητας. Ένα στατικό μοντέλο

Θεωρούμε ένα τοπίο, το οποίο είναι κανονικοποιημένο ως προς την μονάδα, όπου δύο διαφορετικά είδη είναι δυνατόν να συνυπάρχουν. Έστω, B_{0i} για $i=1,2$ οι αρχικές τους βιομάζες και έστω \tilde{g}_i δηλώνει τον τυχαίο ρυθμό ανάπτυξης τους στη μία περίοδο. Αν, αναλογικά, το ποσοστό του τοπίου, έστω $w_i \in [0, 1]$, με $w_1 + w_2 = 1$ κατανεμόταν στην ανάπτυξη κάθε μίας από τις δύο βιομάζες i , τότε στο τέλος της μίας περιόδου οι βιομάζες θα ήταν αντίστοιχα $w_i \tilde{g}_i B_{0i}$. Έστω, ότι στο τέλος της περιόδου οι βιομάζες είτε αφήνονται στο τοπίο και τότε έχουν μία θετική ανά μονάδα αξία, έστω p_i , είτε ψαρεύονται, όποτε τότε η αξία τους καθορίζεται από μία γνωστή εξωγενή αγοραία τιμή $p_i^m \geq 0$ για $i = 1, 2$. Ο κοινωνικός σχεδιαστής ή διαφορετικά ο διαχειριστής του τοπίου ψαρεύει μία αναλογία $h_i \in [0, 1]$ στο τέλος της περιόδου βάσει ενώ κανόνα αλιείας, οπότε τότε η συνολική αξία των βιομαζών των δύο ειδών στο τέλος της περιόδου ορίζεται σαν:

$$tv = \sum_{i=1}^2 (p_i^m h_i w_i \tilde{g}_i B_{0i} + p_i (1 - h_i) w_i \tilde{g}_i B_{0i}) \quad (8.1)$$

Υιοθετώντας την λεγόμενη *e - contamination* προσέγγιση των Epstein και Wang, [25], η οποία είναι σε συνέπεια με το αξίωμα της αποστρόφης στην αβεβαιότητα, υποθέτουμε ότι ο κοινωνικός σχεδιαστής δε γνωρίζει την κατανομή πιθανότητας των τυχαίων ρυθμών ανάπτυξης \tilde{g}_i επακριβώς, αλλά είναι σε θέση να κάνει μία αρχική εκτίμηση αυτών, έστω g_i για $i = 1, 2$. Βάσει της παραπάνω προσέγγισης τα πιστεύω αυτού που καλείται να λάβει μία απόφαση σχετικά με την κατανομή πιθανότητας είναι δυνατόν να περιγράψουν από την παρακάτω σχέση:

$$P_1 = P_{\varepsilon_1}^{g_1} = \{(1 - \varepsilon_1)g_1 + \varepsilon_1 m_1, \quad m_1 \in M_1\} \quad (8.2)$$

$$P_2 = P_{\varepsilon_2}^{g_2} = \{(1 - \varepsilon_2)g_2 + \varepsilon_2 m_2, \quad m_2 \in M_2\} \quad (8.3)$$

με $\varepsilon_i \in [0, 1]$, και M_i να αντιπροσωπεύει το σύνολο των μέτρων πιθανότητας με

φορέα ³⁵ $[g_i - b_i, g_i + b_i]$. Η αποστροφή στη αβεβαιότητα που χαρακτηρίζει τον κοινωνικό σχεδιαστή είναι μία αύξουσα συνάρτηση του ε_i , όπου μία τιμή του $\varepsilon_i = 0$ αντιστοιχεί στην περίπτωση εκείνη της μηδενικής αβεβαιότητας ως προς τον ρυθμό ανάπτυξης. Έστω, u μία συνηθισμένη συνάρτηση χρησιμότητας με $u'(\cdot) > 0$, $u''(\cdot) < 0$. Ο στόχος του κοινωνικού σχεδιαστή είναι να επιλέξει βέλτιστα τα w_1, w_2 , ώστε να μεγιστοποιήσει την ελάχιστη αναμενόμενη χρησιμότητα του tv , η οποία δίνεται από την (8.1), κάτω από την υπόθεση της αποστροφής στην αβεβαιότητα. Σε αυτή την περίπτωση η αναμενόμενη χρησιμότητα, $Eu(tv)$, γράφεται ως:

$$Eu(tv) \equiv \int \int u(tv) dP_{\varepsilon_1}^{g_1} dP_{\varepsilon_2}^{g_2} = \min_{\mu_2 \in P_2} \int \min_{\mu_1 \in P_1} \int u(tv) d\mu_1 d\mu_2 \quad (8.4)$$

Έστω, ότι ο στόχος του κοινωνικού σχεδιαστή είναι να διατηρήσει την βιοποικιλότητα στο τοπίο, το οποίο σημαίνει ότι θέλει: $w_i > 0$. Τότε, στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση χρησιμότητας είναι αύξουσα συνάρτηση των w_1 και w_2 και υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας με την ιδιότητα να συγκεντρώνει την μάζα πιθανότητας με πιθανότητα 1, στο αριστερό άκρο του διαστήματος που αντιστοιχεί στα πιστεύω του κοινωνικού σχεδιαστή αναφορικά με την κατανομή του ρυθμού ανάπτυξης, δηλαδή στο $g_i - b_i$. Έτσι, τότε, η εξίσωση (8.4) γίνεται:

$$u(w_1[p_1 + (p_1^m - p_1)h_1]B_{01}(g_1 - b_1)\varepsilon_1 + w_2[p_2 + (p_2^m - p_2)h_2]B_{02}(g_2 - b_2)\varepsilon_2)$$

Επομένως, το πρόβλημα μεγιστοποίησης της χρησιμότητας, εξαιτίας του ότι u είναι μία αύξουσα συνάρτηση, είναι ισοδύναμο με τη μεγιστοποίηση της παρακάτω ποσότητας:

$$w_1[p_1 + (p_1^m - p_1)h_1]B_{01}(g_1 - b_1)\varepsilon_1 + w_2[p_2 + (p_2^m - p_2)h_2]B_{02}(g_2 - b_2)\varepsilon_2 \quad (8.5)$$

Αν ο κοινωνικός σχεδιαστής δεν αποστρεφόταν την αβεβαιότητα αλλά αποστρεφόταν απλά τον κίνδυνο σύμφωνα με την συνηθισμένη έννοια, τότε το αντίστοιχο του παραπάνω προβλήματος, θα ήταν η βέλτιστη επιλογή των w_i ώστε να μεγιστοποιηθεί η παράσταση:

$$w_1[p_1 + (p_1^m - p_1)h_1]B_{01}g_1 + w_2[p_2 + (p_2^m - p_2)h_2]B_{02}g_2$$

Για κάποιο δεδομένο κανόνα αλιείας, έστω (h_1, h_2) , η παραπάνω ποσότητα παίρνει τη μορφή:

$$a_1 w_1 + a_2 w_2 \quad (8.6)$$

όπου a_1, a_2 παίρνουν τιμές βάσει γνωστών παραμέτρων με:

$$\begin{aligned} a_1 &= [p_1 + (p_1^m - p_1)h_1]B_{01}g_1 \\ a_2 &= [p_2 + (p_2^m - p_2)h_2]B_{02}g_2 \end{aligned}$$

³⁵Με τον όρο φορέα εννοούμε ένα σύνολο στο οποίο μπορεί να παίρνει τιμές κάποια συνάρτηση.

Εξαιτίας της γραμμικής μορφής της παραπάνω εξίσωσης, στην περίπτωση όπου εμείς δεν ενδιαφερόμαστε για τη διατήρηση της βιοποικιλότητας στο τοπίο, τότε βάσει της (8.6): Αν

$$\begin{aligned} a_1 &> a_2, \quad w_1 = 0, \quad w_2 = 1 \\ a_1 &< a_2, \quad w_1 = 1, \quad w_2 = 0 \\ a_1 &= a_2, \quad w_1 = 0.5, \quad w_2 = 0.5 \end{aligned}$$

όπου σε αυτή την συγκεκριμένη περίπτωση οι βιομάζες των δύο ειδών στο τέλος της περιόδου θα είναι αντίστοιχα

$$\begin{aligned} \text{Αν } a_1 &> a_2, \text{ τότε } B_1 = 0, B_2 = B_{02}g_2 \\ \text{Αν } a_1 &< a_2, \text{ τότε } B_1 = B_{01}g_1, B_2 = 0 \\ a_1 &= a_2, \text{ τότε } B_1 = 0.5B_{01}g_1, B_2 = 0.5B_{02}g_2 \end{aligned}$$

Αν ενδιαφερόμασταν για τη διατήρηση της βιοποικιλότητας στο τοπίο, το οποίο σημαίνει ότι θέλουμε $w_i > 0$ και να είναι τουλάχιστον πάνω από κάποιο ποσοστό του τοπίου, έστω γ , με $0 < \gamma < 0.5$ για $i = 1, 2$, τότε στην περίπτωση αυτή λαμβάνουμε ότι:

$$\begin{aligned} \text{Αν } a_1 &> a_2, \text{ τότε } w_1 = 1 - \gamma, \quad w_2 = \gamma \\ \text{Αν } a_1 &< a_2, \text{ τότε } w_1 = \gamma, \quad w_2 = 1 - \gamma \\ a_1 &= a_2, \text{ τότε } w_1 = 0.5, \quad w_2 = 0.5 \end{aligned} \quad (8.7)$$

Στην περίπτωση αυτή, οι δύο βιομάζες στο τέλος της περιόδου θα είναι αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} \text{Αν } a_1 &> a_2, \text{ τότε } B_1 = (1 - \gamma)B_{01}g_1, B_2 = \gamma B_{02}g_2 \\ \text{Αν } a_1 &< a_2, \text{ τότε } B_1 = \gamma B_{01}g_1, B_2 = (1 - \gamma)B_{02}g_2 \\ a_1 &= a_2, \text{ τότε } B_1 = 0.5B_{01}g_1, B_2 = 0.5B_{02}g_2 \end{aligned}$$

Η τρίτη περίπτωση στις παραπάνω εξισώσεις είναι μία ειδική περίπτωση και δείχνει ότι είμαστε σε θέση να καθορίσουμε ένα κανόνα αλιείας (h_1^*, h_2^*), τέτοιο ώστε $a_1 = a_2$, ο οποίος αντιστοιχεί στην περίπτωση εκείνη όπου μοιράζουμε εξίσου το τοπίο στα δύο παραπάνω είδη.

Στη συνέχεια, θεωρώντας την εξίσωση (8.5) η οποία αντιστοιχεί στην περίπτωση της αποστροφής στην αβεβαιότητα, διατυπώνουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας την e -contamination προσέγγιση. Χρησιμοποιώντας τον ίδιο κανόνα όπως στην παραπάνω περίπτωση, λαμβάνουμε την αντίστοιχη εξίσωση (8.6), η οποία τώρα δίνεται από την:

$$a_1 \left(1 - \frac{b_1 \varepsilon_1}{g_1}\right) w_1 + a_2 \left(1 - \frac{b_2 \varepsilon_2}{g_2}\right) w_2 \quad (8.8)$$

Από την παραπάνω εξίσωση βλέπουμε ότι: Αν η δομή του μοντέλου του προβλήματος είναι κατάλληλη, που σημαίνει ότι οι τιμές των παραμέτρων g_i, b_i, ε_i ,

οι οποίες αντικατοπτρίζουν την αξιοπιστία μας απέναντι στο αρχικώς εκτιμώμενο μοντέλο είναι τέτοιες ώστε:

$$\begin{aligned} a_1(1 - \frac{b_1\varepsilon_1}{g_1}) < a_2(1 - \frac{b_2\varepsilon_2}{g_2}), \text{ τότε } w_1 &= \gamma, w_2 = 1 - \gamma \\ a_1(1 - \frac{b_1\varepsilon_1}{g_1}) > a_2(1 - \frac{b_2\varepsilon_2}{g_2}), \text{ τότε } w_1 &= 1 - \gamma, w_2 = \gamma \\ a_1(1 - \frac{b_1\varepsilon_1}{g_1}) = a_2(1 - \frac{b_2\varepsilon_2}{g_2}), \text{ τότε } w_1 &= 0.5, w_2 = 0.5 \end{aligned} \quad (8.9)$$

Από την τελευταία γραμμή της παραπάνω εξίσωσης, λαμβάνουμε ότι για κάποιο κανόνα h_1 υπάρχει ένας αντίστοιχος κανόνας h_2 τέτοιος ώστε: $w_1 = 0.5$, $w_2 = 0.5$. Επομένως, συγκρίνοντας τις εξισώσεις (8.7), (8.9), λαμβάνουμε την παρακάτω Πρόταση:

Πρόταση 8.1.1 *Για ένα λήπτη αποφάσεων ο οποίος αποστρέφεται την αβεβαιότητα και λαμβάνει αποφάσεις βάσει της μεγιστοποίησης της ελάχιστης αναμενόμενης τιμής της χρησιμότητας, η οποία δίνεται από την (8.1) και όπου η αποστροφή στην αβεβαιότητα έχει διατυπωθεί χρησιμοποιώντας την *e-contamination* προσέγγιση, τότε η δομή των παραμέτρων του προβλήματος είναι πιθανόν να αντιστρέψει την συμπεριφορά του κοινωνικού σχεδιαστή συγκρινόμενη με την περίπτωση της αποστροφής στον κίνδυνο.*

Παρακάτω, θεωρώντας ένα δυναμικό μοντέλο βλέπουμε πως η αποστροφή στην αβεβαιότητα επηρεάζει τις αποφάσεις του κοινωνικού σχεδιαστή.

8.2 Διαχείριση βιοποικιλότητας. Ένα δυναμικό μοντέλο

Σε αυτό το υποκεφάλαιο χρησιμοποιώντας ως όχημα το μοντέλο το οποίο αναπτύξαμε στο παραπάνω υποκεφάλαιο, όπου είδαμε ότι η αβεβαιότητα επηρεάζει καθοριστικά την συμπεριφορά του διαχειριστή, επεκτείνουμε αυτό σε δυναμικό πλαίσιο, όπου αρχικά αντιμετωπίζουμε ένα ιδιωτικό και έπειτα ένα κοινωνικά βέλτιστο πρόβλημα.

8.2.1 Ένα ιδιωτικά βέλτιστο πρόβλημα διαχείρισης βιοποικιλότητας

Επεκτείνοντας, λοιπόν, το μοντέλο θεωρούμε ότι οι δύο βιομάζες ικανοποιούν στην περίπτωση αυτή τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\frac{dB_1}{dt} = w_1\tilde{g}_1f_1(B_1) - H_1 - d_1B_1 = w_1\tilde{g}_1f_1(B_1) - E_1B_1q_1 - d_1B_1 \quad (8.10)$$

$$\frac{dB_2}{dt} = w_2\tilde{g}_2f_2(B_2) - H_2 - d_2B_2 = w_2\tilde{g}_2f_2(B_2) - E_2B_2q_2 - d_2B_2 \quad (8.11)$$

όπου B_i , w_i , και \tilde{g}_i , για $i = 1, 2$ ορίζονται όπως στο παραπάνω υποκεφάλαιο, $f_i(B_i)$ είναι δύο κοίλες συναρτήσεις των δύο βιομαζών με $f_i' > 0$ και $f_i'' < 0$.

0, H_i είναι οι αντίστοιχοι ρυθμοί αλιείας, q_i είναι ο συντελεστής ευκολίας στην αλιεία, και E_i οι αντίστοιχες προσπάθειες που πρέπει να καταβληθούν. Τέλος, οι παράμετροι d_i συμβολίζουν τους ρυθμούς θνησιμότητας των δύο βιομαζών. Το πρόβλημα το οποίο έχει να αντιμετωπίσει ο διαχειριστής σε αυτή την περίπτωση το οποίο ονομάζουμε ιδιωτικό βέλτιστο πρόβλημα διαχείρισης βιοποικιλότητας, PO , επειδή ο κοινωνικός σχεδιαστής μεγιστοποιεί μόνο τα κέρδη που προέρχονται από την πώληση του αλιεύματος, ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} \max_{E_i} \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} \left\{ \sum_{i=1}^2 (p_i^m H_i - C(B_i) H_i) \right\} dt \\ \text{ή} \\ \max_{E_i} \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} \left\{ \sum_{i=1}^2 E_i B_i q_i (p_i^m - C(B_i)) \right\} dt \end{aligned} \quad (8.12)$$

με $0 \leq E_i \leq E_i^{\max}$ μ.π. (8.10),(8.11), με p_i^m να είναι η τιμή του αλιεύματος στην αγορά και $C(B_i)$ μία συνάρτηση η οποία εκφράζει το κόστος ανά μονάδα μάζας και είναι φθίνουσα, γιατί καθώς μειώνεται η ποσότητα που είναι διαθέσιμη προς αλιεία στο τοπίο είναι πιο δύσκολο για μας να τη βρούμε και να την αλιεύσουμε. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (8.10), (8.11), ώστε να λύσουμε ως προς E_i για $i = 1, 2$, ισοδύναμα λαμβάνουμε ότι:

$$\begin{aligned} -\frac{dB_i}{dt} + w_i \tilde{g}_i f_i(B_i) &= E_i B_i q_i + d_i B_i \\ E_i &= \frac{-\frac{dB_i}{dt} + w_i \tilde{g}_i f_i(B_i) - d_i B_i}{B_i q_i} \end{aligned} \quad (8.13)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω εξίσωση στην (8.12) μετά από κάποιους υπολογισμούς η τελευταία γίνεται:

$$\max_{B_i} \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} \left\{ \sum_{i=1}^2 (p_i^m - C(B_i)) \left(-\frac{dB_i}{dt} + w_i \tilde{g}_i f_i(B_i) - d_i B_i \right) \right\} dt \quad (8.14)$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη, το παραπάνω πρόβλημα δύναται να ξαναγραφεί ως:

$$\begin{aligned} \max_{B_i} \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} \left\{ \sum_{i=1}^2 (p_i^m - C(B_i)) \left(-\delta B_i + w_i \tilde{g}_i f_i(B_i) - d_i B_i \right) \right\} dt \quad (8.15) \\ \text{με } 0 \leq B_i \leq B_i^{\max} \end{aligned}$$

Τότε, η βέλτιστη στάσιμη σταθερή κατάσταση καθορίζεται από την:

$$\max_{B_1, B_2} W(B_1, B_2, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2) = \max_{B_1, B_2} \sum_{i=1}^2 (p_i^m - C(B_i)) \left(-\delta B_i + w_i \tilde{g}_i f_i(B_i) - d_i B_i \right) \quad (8.16)$$

Εδώ, όπως φαίνεται από την παραπάνω εξίσωση, με το μετασχηματισμό που κάναμε επιλέγουμε τις βέλτιστες βιομάζες σε στατικό πρόβλημα.

Στην περίπτωση, όπου αυτός ο οποίος καλείται να λάβει κάποια απόφαση πιστεύει ότι γνωρίζει με σιγουριά την τιμή, έστω g_i , τότε το παραπάνω πρόβλημα γίνεται:

$$\max_{B_1, B_2} \sum_{i=1}^2 (p_i^m - C(B_i))(-\delta B_i + w_i g_i f_i(B_i) - d_i B_i) \quad (8.17)$$

με τις συνθήκες πρώτες τάξης να δίνονται από το παρακάτω σύνολο εξισώσεων:

$$0 = -C'(B_i)(w_i g_i f_i(B_i) - \delta B_i - d_i B_i) + (p_i^m - C(B_i))(w_i g_i f_i'(B_i) - \delta - d_i) \quad (8.18)$$

$$\begin{aligned} \text{Ισοδύναμα } p_i^m(-\delta - d_i) + p_i^m w_i g_i f_i'(B_i) = \\ [C'(B_i)B_i + C(B_i)](-\delta - d_i) + w_i g_i C(B_i) f_i'(B_i) + w_i g_i C'(B_i) f_i(B_i) \\ p_i^m - \frac{p_i^m w_i g_i f_i'(B_i)}{\delta + d_i} = C'(B_i)B_i + C(B_i) - \frac{w_i g_i (C(B_i) f_i'(B_i) + C'(B_i) f_i(B_i))}{\delta + d_i} \end{aligned} \quad (8.19)$$

$$p_i^m - [C'(B_i)B_i - \frac{w_i g_i (C(B_i) f_i'(B_i) + C'(B_i) f_i(B_i)) - p_i^m w_i g_i f_i'(B_i)}{\delta + d_i}] = C(B_i) \quad (8.20)$$

$$\begin{aligned} (C(B_i)B_i - \frac{w_i g_i C(B_i) f_i(B_i) - p_i^m w_i g_i f_i(B_i)}{\delta + d_i})' = p_i^m \quad i = 1, 2 \text{ ή} \\ C(B_i)B_i - \frac{w_i g_i C(B_i) f_i(B_i) - p_i^m w_i g_i f_i(B_i)}{\delta + d_i} = p_i^m B_i + c \text{ με } c \text{ σταθερά} \end{aligned} \quad (8.21)$$

Στην περίπτωση εκείνη όπου η συνάρτηση κόστους είναι φθίνουσα και κυρτή τότε υπάρχει μία μοναδική λύση στην παραπάνω εξίσωση.³⁶ Στη συνέχεια, το πρόβλημα γίνεται παρακάτω πιο ενδιαφέρον, αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση είναι κοίλη-κυρτή. Εναλλάσσεται δηλαδή. Δοθέντος αυτής της μη γραμμικής μορφής της $C(B_i)$, υπάρχουν πιθανόν περισσότερα από ένα σημεία που θα είναι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης. Εξαιτίας του ότι η αντικειμενική συνάρτηση (8.16) μπορεί να θεωρηθεί σαν άθροισμα δύο συναρτήσεων των δύο βιομαζών B_i και αν η συνάρτηση κόστους ικανοποιεί $C(0) = +\infty, C(\infty) = 0$, έχουμε

³⁶ Δηλαδή μία και μόνο τιμή για κάθε μία από τις δύο βιομάζες, που μεγιστοποιεί την αντικειμενική μας συνάρτηση που δίνεται από την (8.17).

ότι: Η σχέση (8.20) είναι της μορφής:

$$\begin{aligned}
p_i^m - W(B_i) &= K_i(B_i), \quad i = 1, 2 \\
W(B_i) &= \left\{ C(B_i) + \frac{p_i^m w_i g_i f_i'(B_i)}{\delta + d_i} \right\} \\
K_i(B_i) &= C'(B_i) B_i - \frac{w_i g_i (C(B_i) f_i'(B_i) + C'(B_i) f_i(B_i))}{\delta + d_i}, \\
&\quad \text{ή} \\
K_i(B_i) &= C'(B_i) B_i - \frac{w_i g_i (C(B_i) f_i(B_i))'}{\delta + d_i}
\end{aligned}$$

με $C(B_i)$, $f_i'(B_i)$ φθίνουσες συναρτήσεις. Επομένως η συνάρτηση $W(B_i)$ είναι φθίνουσα και η $K_i(B_i)$ έχει την ιδιότητα ότι υπάρχει ένα σημείο B_w με $K_i'(B_i) < 0$ όταν $B < B_w$ και $K_i'(B_i) > 0$ όταν $B > B_w$ για $i = 1, 2$.³⁷ Τότε, βάσει των Brock Starret [11], μπορούμε με κατάλληλη επιλογή συνάρτησης κόστους να δείξουμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο μέγιστα και ότι οι λύσεις των μεγίστων και ελαχίστων σημείων εναλλάσσονται βάσει των (8.16) και (8.20). Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε παρακάτω ότι υπάρχουν ακριβώς δύο σημεία μέγιστου σαν λύσεις της παραπάνω εξίσωσης για κάθε μία από τις δύο βιομάζες, όπου ο άνω δείκτης δείχνει αύξουσα διατεταγμένη σειρά και έστω (B_1^1, B_2^1) , (B_1^3, B_2^3) , είναι τοπικά μέγιστα και (B_1^2, B_2^2) ένα ζεύγος τοπικών ελαχίστων. Ειδικότερα αν

$$\begin{aligned}
-(W'(B_i) + K_i'(B_i)) &< 0 \quad \text{τότε } B_i \text{ είναι τοπικό μέγιστο} \\
-(W'(B_i) + K_i'(B_i)) &> 0 \quad \text{τότε } B_i \text{ είναι τοπικό ελάχιστο}
\end{aligned}$$

Αν υποθέσουμε ένα μηχανισμό προσαρμογής σε μία γειτονιά της βέλτιστης στάσιμης σταθερής κατάστασης, OSS , του τύπου $dB/dt = \varphi [p_i^m - K_i(B_i) - C(B_i)]$ με $\varphi > 0$, τότε τα τοπικά μέγιστα είναι ευσταθή σημεία ισορροπίας και τα τοπικά ελάχιστα είναι ασταθή. Υποθέτοντας ότι ένα καθολικό μέγιστο ζεύγος υπάρχει, έστω (B_1^c, B_2^c) , αναφορικά με την περίπτωση αποστροφής κινδύνου έχουμε ότι:

$$E_i^{RA} = \begin{cases} E_i^{\max} & \text{Αν } B_i > B_i^c \\ \frac{w_i g_i f_i(B_i^c) - d_i B_i^c}{q_i B_i^c} & \text{Αν } B_i = B_i^c \\ 0 & \text{Αν } B_i < B_i^c \end{cases} \quad (8.22)$$

³⁷ Αυτό ισχύει διότι κάθε μία εκ των $K_i(B_i)$ μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα άθροισμα δύο συναρτήσεων, $C'(B_i) B_i$, $-\frac{w_i g_i (C(B_i) f_i(B_i))'}{\delta + d_i}$. Η συνάρτηση κόστους C , είναι κοίλη-κυρτή, και οι συναρτήσεις f_i είναι αυστηρά κοίλες. Επίσης χρησιμοποιώντας βασικό λογισμό λαμβάνουμε ότι η παράγωγος του δεύτερου όρου όταν C είναι κυρτή είναι θετικός αριθμός και όταν είναι κοίλη είναι αρνητικός αριθμός. Επομένως με κατάλληλη συνάρτηση κόστους έχουμε ότι: υπάρχει σημείο έτσι ώστε B_w με $K_i'(B_i) < 0$ όταν $B < B_w$ και $K_i'(B_i) > 0$ όταν $B > B_w$,

Η παραπάνω σχέση αποτελεί το *MRAP* (most rapid approach path), δηλαδή το πιο σύντομο μονοπάτι προσέγγισης. Αυτό σημαίνει πρακτικά ότι όταν είμαστε σε μεγάλες βιομάζες και σε υψηλότερες από τις βέλτιστες τιμές των βιομαζών, η προσπάθεια που καταβάλουμε για την αλιεία αυτών είναι μέγιστη, μέχρι να φτάσουμε το βέλτιστο, B_i^c , οπότε η προσπάθεια εκεί σταθεροποιείται για να διατηρηθεί το σύστημα στη βέλτιστη τιμή. Όταν είμαστε σε τιμές μικρότερες από τη βέλτιστη τότε η προσπάθεια που καταβάλουμε είναι μηδέν. Η εικόνα 13 στο Παράρτημα παρέχει μία γραφική απεικόνιση του πιο σύντομου μονοπατιού προσέγγισης «*MRAP*».

Στη συνέχεια, υποθέτουμε όπως και στο προηγούμενο υποκεφάλαιο ότι αυτός ο οποίος διαχειρίζεται το τοπίο δεν ξέρει την πραγματική κατανομή πιθανότητας των τυχαίων ρυθμών ανάπτυξης \tilde{g}_i επακριβώς, αλλά είναι σε θέση να κάνει μία αρχική εκτίμηση για αυτά, έστω g_i για $i = 1, 2$. Υιοθετώντας την *e-contamination* προσέγγιση των Epstein και Wang χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (8.2), (8.3), τότε η σχέση (8.17) γράφεται ως:

$$\max_{B_1, B_2} \sum_{i=1}^2 (p_i^m - C(B_i))(-\delta B_i + w_i(g_i - b_i \varepsilon_i) f_i(B_i) - d_i B_i)$$

Η συνθήκη πρώτης τάξης στην περίπτωση αυτή, μετά από υπολογισμούς είναι:

$$\begin{aligned} p_i^m - \frac{p_i^m w_i (g_i - b_i \varepsilon_i) f_i'(B_i)}{\delta + d_i} = \\ C'(B_i) B_i + C(B_i) - \frac{w_i (g_i - b_i \varepsilon_i) (C(B_i) f_i'(B_i) + C'(B_i) f_i(B_i))}{\delta + d_i} \\ p_i^m - C(B_i) = \tag{8.23} \\ [C'(B_i) B_i - \frac{w_i (g_i - b_i \varepsilon_i) (C(B_i) f_i'(B_i) + C'(B_i) f_i(B_i) - p_i^m f_i'(B_i))}{\delta + d_i}] \\ (C(B_i) B_i - \frac{w_i (g_i - b_i \varepsilon_i) C(B_i) f_i(B_i) - p_i^m w_i (g_i - b_i \varepsilon_i) f_i(B_i)}{\delta + d_i})' = p_i^m \quad i = 1, 2 \\ C(B_i) B_i - \frac{w_i (g_i - b_i \varepsilon_i) C(B_i) f_i(B_i) - p_i^m w_i (g_i - b_i \varepsilon_i) f_i(B_i)}{\delta + d_i} = p_i^m B_i + c, \tag{8.24} \end{aligned}$$

c σταθερά

Εφαρμόζοντας τον ίδιο συλλογισμό όπως πριν για το πρόβλημα της αποστροφής στην αβεβαιότητα, το οποίο το συμβολίζουμε με UA , υποθέτοντας την ύπαρξη ενός καθολικού μεγίστου τότε έχουμε:

$$E_i^{UA} = \begin{cases} E_i^{\max} & \text{Αν } B_i > B_i^c \\ \frac{w_i (g_i - b_i \varepsilon_i) f_i(B_i^c) - d_i B_i^c}{q_i B_i^c} & \text{Αν } B_i = B_i^c \\ 0 & \text{Αν } B_i < B_i^c \end{cases} \tag{8.25}$$

Στη συνέχεια, συγκρίνοντας την (8.23), με την (8.19), και ξαναγράφοντας την πρώτη σαν:

$$p_i^m - \frac{p_i^m w_i g_i f_i'(B_i)}{\delta + d_i} = C'(B_i)B_i + C(B_i) - \frac{w_i g_i (C(B_i)f_i'(B_i) + C'(B_i)f_i(B_i))}{\delta + d_i} \quad (8.26)$$

$$+ \frac{w_i b_i \varepsilon_i (C(B_i)f_i'(B_i) + C'(B_i)f_i(B_i) - p_i^m f_i'(B_i))}{\delta + d_i}$$

λαμβάνουμε ότι στην άνω εξίσωση (8.26), στη δεύτερη γραμμή υπάρχει ένας ακόμα όρος, $+\frac{w_i b_i \varepsilon_i (C(B_i)f_i'(B_i) + C'(B_i)f_i(B_i) - p_i^m f_i'(B_i))}{\delta + d_i}$, σε σχέση με την (8.19). Επομένως αν αντικαταστήσουμε τη βέλτιστη λύση του προβλήματος RA ,³⁸ που αντιστοιχεί σε ένα τοπικά ευσταθές σημείο έστω B_i^{RA} , σε αυτό τον όρο και υπολογίσουμε την αριθμητική τιμή, τότε: Αν το αποτέλεσμα είναι θετικός αριθμός η βέλτιστη λύση που αντιστοιχεί στο πρόβλημα αποστροφής κινδύνου, B_i^{RA} , θα είναι μικρότερη από την αντίστοιχη λύση του προβλήματος αποστροφής στην αβεβαιότητα, έστω B_i^{UA} . Διαφορετικά, αν το αποτέλεσμα είναι αρνητικός αριθμός, τότε η βέλτιστη λύση στο πρώτο RA πρόβλημα θα είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη λύση στο δεύτερο UA πρόβλημα. Ειδικότερα, η διαφορά στις τιμές εξαρτάται από το πρόσημο της συνάρτησης:

$$C(B_i)f_i'(B_i) + C'(B_i)f_i(B_i) - p_i^m f_i'(B_i) \quad \text{ή} \quad (8.27)$$

$$C'(B_i)f_i(B_i) + \{C(B_i) - p_i^m\}f_i'(B_i)$$

Βάσει της μονοτονίας των συναρτήσεων $C(B_i)$ και $f_i(B_i)$, το πιθανότερο είναι³⁹, ότι όταν η βέλτιστη λύση B_i^{RAc} , παίρνει μικρές τιμές δηλαδή είμαστε στη λεκάνη έλξης που αντιστοιχεί σε μικρές βιομάζες, τότε η παραπάνω συνάρτηση είναι θετική το οποίο σημαίνει ότι $B_i^{RA} < B_i^{UA}$. Επομένως, στην περίπτωση αποστροφής στην αβεβαιότητα γινόμαστε περισσότερο αμυντικοί στις αποφάσεις μας σε σχέση με την κλασική περίπτωση. Αφέτερου, όταν οι τιμές των βιομαζών είναι μεγάλες, δηλαδή είμαστε στη λεκάνη έλξης που αντιστοιχεί σε μεγάλες βιομάζες, λαμβάνουμε ότι $B_i^{RA} > B_i^{UA}$, που σημαίνει ότι είμαστε πιο επιθετικοί σε σχέση με την περίπτωση αποστροφής κινδύνου. Μια πιθανή εξήγηση για το γεγονός αυτό είναι ότι για μικρές βιομάζες είμαστε πιο συντηρητικοί διότι μία κακιά κατανομή πιθανόν να οδηγήσει σε εξαφάνιση αρκετά είδη. Αντίθετα, όσο μεγαλώνουν οι βιομάζες ο φόβος εξαλείφεται και γινόμαστε πιο επιθετικοί. Το παραπάνω ενδιαφέρον αποτέλεσμα είναι συνέπεια της μη γραμμικότητας στις συναρτήσεις μας. Επιπλέον η ποσότητα $|\frac{w_i b_i \varepsilon_i (C(B_i)f_i'(B_i) + C'(B_i)f_i(B_i) - p_i^m f_i'(B_i))}{\delta + d_i}|$, στην παραπάνω έκφραση μπορεί

³⁸ Αναφερόμαστε στο πρόβλημα που αντιστοιχεί στην περίπτωση αποστροφής κινδύνου, το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση (8.16).

³⁹ Ίσως να υπάρχουν συναρτήσεις που συμβαίνει το αντίστροφο. Εδώ αναλύουμε την πιο πιθανή περίπτωση.

να παρουσιαστεί σαν ένα μέτρο προφύλαξης απέναντι στην άγνοια και την αβεβαιότητα.

Συμβολίζοντας με B_i^{RA} και B_i^{UA} τις βέλτιστες λύσεις στο πρόβλημα αποστροφής κινδύνου και αβεβαιότητας αντίστοιχα, αν εμείς επιθυμούσαμε την σύγκριση των αντίστοιχων προσπαθειών που ο διαχειριστής του τοπίου πρέπει να καταβάλει και οι οποίες δίνονται από τις (8.22), (8.25), λαμβάνουμε ότι:

$$E_i^{RA} - E_i^{UA} = \frac{w_i g_i}{q_i} \left\{ \frac{f_i(B_i^{RA})}{B_i^{RA}} - \frac{f_i(B_i^{UA})}{B_i^{UA}} \right\} + w_i b_i \varepsilon_i f_i(B_i^{UA})$$

Επομένως, βάσει της μονοτονίας της συνάρτησης f , στην περίπτωση όπου $B_i^{RA} < B_i^{UA}$ το οποίο λαμβάνει χώρα για μικρές τιμές των βιομαζών, η διαφορά $E_i^{RA} - E_i^{UA}$ θα είναι μεγαλύτερη του μηδέν, ενώ όταν $B_i^{RA} > B_i^{UA}$ που συμβαίνει για μεγάλες βιομάζες έχουμε πιθανότερα ότι $E_i^{RA} - E_i^{UA} < 0$, $E_i^{RA} < E_i^{UA}$.⁴⁰ Επομένως για μικρές βιομάζες η προσπάθεια που ο διαχειριστής πρέπει να καταβάλει στην περίπτωση αποστροφής κινδύνου είναι μεγαλύτερη από ότι στην περίπτωση αποστροφής στην αβεβαιότητα.⁴¹

8.2.2 Ένα κοινωνικά βέλτιστο πρόβλημα διαχείρισης βιοποικιλότητας

Στη συνέχεια λαμβάνουμε υπόψη τόσο τις τιμές που προκύπτουν από την πώληση του αλιεύματος, όσο και τις τιμές ύπαρξης των βιομαζών που αφήνονται στο τοπίο και δεν αλιεύονται, αντιμετωπίζουμε το κοινωνικά βέλτιστο πρόβλημα διαχείρισης βιοποικιλότητας, έστω SO το οποίο ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} \max_{E_i} \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} \left\{ \sum_{i=1}^2 (p_i^m H_i - C(B_i) H_i) + \sum_{i=1}^2 p_i B_i \right\} dt \\ \text{ή} \\ \max_{E_i} \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} \left\{ \sum_{i=1}^2 E_i B_i q_i (p_i^m - C(B_i)) + \sum_{i=1}^2 p_i B_i \right\} dt \quad (8.28) \\ \text{με } 0 \leq E_i \leq E_i^{\max} \text{ μ.π. (8.10), (8.11),} \end{aligned}$$

⁴⁰ Η διαφορά είναι: $E_i^{RA} - E_i^{UA} = \frac{w_i g_i}{q_i} \left\{ \frac{f_i(B_i^{RA})}{B_i^{RA}} - \frac{f_i(B_i^{UA})}{B_i^{UA}} \right\} + w_i b_i \varepsilon_i f_i(B_i^{UA})$.

Ο δεύτερος όρος είναι θετικός αλλά το πρόσημο του πρώτου εξαρτάται από το πρόσημο της συνάρτησης: $\left\{ \frac{f_i(B_i^{RA})}{B_i^{RA}} - \frac{f_i(B_i^{UA})}{B_i^{UA}} \right\}$. Θεωρούμε την παράγωγο αυτής. $\left(\frac{f_i(x)}{x} \right)' = \frac{f_i'(x)x - f_i(x)}{x^2}$. Η παράγωγος είναι αρνητικός αριθμός. Στην περίπτωση λοιπόν όπου $B_i^{RA} < B_i^{UA}$, το οποίο λαμβάνει χώρα για μικρές βιομάζες, $\frac{f_i(B_i^{RA})}{B_i^{RA}} - \frac{f_i(B_i^{UA})}{B_i^{UA}} > 0$

⁴¹ Στην μελέτη του παραπάνω μοντέλου χρησιμοποιήσαμε μία γενικά κοίλη συνάρτηση $f_i, i = 1, 2$, αξίζει όμως να σημειωθεί ότι τα αποτελέσματα θα ισχύουν και για την: $f_i(B_i) = B_i (1 - \gamma_i B_i)$. Όπου \hat{g}_i είναι ο στοχαστικός ρυθμός ανάπτυξης, και $1/\gamma_i$ είναι η φέρουσα χωρητικότητα του περιβάλλοντος για κάθε είδος.

με p_i την τιμή που έχουν οι βιομάζες οι οποίες μένουν στο τοπίο. Χρησιμοποιώντας την σχέση (8.13), και το *MRAP* στη συνέχεια τότε η (8.28), αρχικά γίνεται:

$$\max_{B_i} \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} \left\{ \sum_{i=1}^2 (p_i^m - C(B_i))(-\delta B_i + w_i \tilde{g}_i f_i(B_i) - d_i B_i) + \sum_{i=1}^2 p_i B_i \right\} dt \quad (8.29)$$

$$\text{με } 0 \leq B_i \leq B_i^{\max}$$

Τότε, η βέλτιστη σταθερή κατάσταση καθορίζεται από την σχέση:

$$\begin{aligned} \max_{B_1, B_2} W(B_1, B_2, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2) = & \quad (8.30) \\ \max_{B_1, B_2} \sum_{i=1}^2 (p_i^m - C(B_i))(-\delta B_i + w_i \tilde{g}_i f_i(B_i) - d_i B_i) + \sum_{i=1}^2 p_i B_i \end{aligned}$$

Στην περίπτωση όπου αυτός ο οποίος καλείται να λάβει μία απόφαση πιστεύει ότι γνωρίζει με βεβαιότητα την τιμή των ρυθμών εξέλιξης έστω g_i , των ρυθμών ανάπτυξης, τότε το παραπάνω πρόβλημα γίνεται:

$$\max_{B_1, B_2} \sum_{i=1}^2 (p_i^m - C(B_i))(-\delta B_i + w_i \tilde{g}_i f_i(B_i) - d_i B_i) + \sum_{i=1}^2 p_i B_i \quad (8.31)$$

με συνθήκη πρώτης τάξης την:

$$\begin{aligned} 0 = -C'(B_i)(w_i g_i f_i(B_i) - \delta B_i - d_i B_i) + & \text{ή} \\ (p_i^m - C(B_i))(w_i g_i f_i'(B_i) - \delta - d_i) + p_i, & \\ p_i^m - \frac{p_i}{\delta + d_i} - \frac{p_i^m w_i g_i f_i'(B_i)}{\delta + d_i} = & \\ C'(B_i)B_i + C(B_i) - \frac{w_i g_i (C(B_i) f_i'(B_i) + C'(B_i) f_i(B_i))}{\delta + d_i} & \\ p_i^m - \frac{p_i}{\delta + d_i} - C(B_i) = & \quad (8.32) \\ [C'(B_i)B_i - \frac{w_i g_i (C(B_i) f_i'(B_i) + C'(B_i) f_i(B_i)) - p_i^m w_i g_i f_i'(B_i)}{\delta + d_i}] & \\ (C(B_i)B_i - \frac{w_i g_i C(B_i) f_i(B_i) - p_i^m w_i g_i f_i(B_i)}{\delta + d_i})' = p_i^m - \frac{p_i}{\delta + d_i} \quad i = 1, 2 \text{ ή} & \\ C(B_i)B_i - \frac{w_i g_i C(B_i) f_i(B_i) - p_i^m w_i g_i f_i(B_i)}{\delta + d_i} = (p_i^m - \frac{p_i}{\delta + d_i})B_i + c & \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι αυτός ο οποίος καλείται να λάβει μία απόφαση δε γνωρίζει την κατανομή πιθανότητας των \tilde{g}_i επακριβώς, αλλά δύναται να κάνει κάποια εκτίμηση έστω g_i για $i = 1, 2$. Ακολουθώντας την *e-contamination*,

προσέγγιση χάνοντας χρήση των εξισώσεων (8.2), (8.3), τότε η (8.30) γράφεται σαν:

$$\max_{B_1, B_2} \sum_{i=1}^2 (p_i^m - C(B_i))(-\delta B_i + w_i(g_i - b_i \varepsilon_i) f_i(B_i) - d_i B_i) + \sum_{i=1}^2 p_i B_i$$

Με συνθήκες πρώτης τάξης:

$$(C(B_i)B_i - \frac{w_i(g_i - b_i \varepsilon_i)C(B_i)f_i(B_i) - p_i^m w_i(g_i - b_i \varepsilon_i)f_i(B_i)}{\delta + d_i})' = p_i^m - \frac{p_i}{\delta + d_i} \quad (8.33)$$

$$\begin{aligned} & \text{ή } p_i^m - \frac{p_i}{\delta + d_i} - C(B_i) = \\ & C'(B_i)B_i - \frac{w_i(g_i - b_i \varepsilon_i)(C(B_i)f_i'(B_i) + C'(B_i)f_i(B_i) - p_i^m f_i'(B_i))}{\delta + d_i} \end{aligned}$$

Στην περίπτωση τώρα όπου συγκρίνουμε τις (8.32), (8.33), δηλαδή τη λύση του κοινωνικά βέλτιστου προβλήματος βιοποικιλότητας στην περίπτωση αποστροφής κινδύνου και αβεβαιότητας, λαμβάνουμε μετά από υπολογισμούς ότι υπάρχει ακριβώς αυτός ο παραπάνω όρος στη δεύτερη περίπτωση όπως και στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε ακριβώς τον ίδιο συλλογισμό όπως παραπάνω και επομένως να πάρουμε ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα.

Θεωρώντας παρακάτω ότι υπάρχει ένα καθολικό μέγιστο (*global*), έστω (B_1^{RAc}, B_2^{RAc}) στο (8.32) και (B_1^{UAc}, B_2^{UAc}) στο (8.33), τότε οι εξισώσεις (8.22), (8.25), καθώς επίσης και τα αποτελέσματα αναφορικά με την σύγκριση των E_i^{RA}, E_i^{UA} ισχύουν επίσης τώρα.

Επίσης, αν εμείς επιθυμούσαμε τη σύγκριση των λύσεων μεταξύ των (8.32) και (8.33) με τις αντίστοιχες (8.20) (8.23), μπορούμε να δούμε ότι υπάρχει ένας επιπλέον όρος, $-\frac{p_i}{\delta + d_i} < 0$, στο δεξί μέρος των εξισώσεων οι οποίες αντιστοιχούν στο κοινωνικά βέλτιστο πρόβλημα και επομένως οι βέλτιστες τιμές των βιομαζών στο οικοσύστημα, στο ιδιωτικά βέλτιστο πρόβλημα, είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες βιομάζες στο κοινωνικά βέλτιστο πρόβλημα, ανεξάρτητα των συναρτήσεων C, f_i . Επίσης επειδή η λύση, δηλαδή οι βέλτιστες βιομάζες που αντιστοιχούν στο *PO* πρόβλημα είναι μικρότερη από την αντίστοιχη *SO* λύση, αν θεωρήσουμε τη διαφορά ανάμεσα στις αντίστοιχες προσπάθειες, επειδή η παράγωγος της συνάρτησης $\frac{f_i(x)}{x}$ έχει αρνητικές τιμές, έπεται ότι οι προσπάθειες που αντιστοιχούν στο *PO* πρόβλημα θα είναι μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες προσπάθειες στο *SO* πρόβλημα. Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα μας μπορούμε να πάρουμε την παρακάτω Πρόταση:

Πρόταση 8.2.1 Για το παραπάνω μοντέλο διαχείρισης βιοποικιλότητας όταν συγκρίνουμε τα βέλτιστα επίπεδα βιομάζας και τις αντίστοιχες προσπάθειες που πρέπει να καταβληθούν από τον διαχειριστή ώστε να επιτευχθούν αυτά, τόσο στο κοινωνικά όσο και ιδιωτικά βέλτιστο πρόβλημα, στην περίπτωση αποστροφής

κινδύνου και αποστροφής στην αβεβαιότητα, όπου αυτή έχει διατυπωθεί με τη βοήθεια της ϵ – contamination προσέγγισης, λαμβάνουμε τα παρακάτω:

1. Τα βέλτιστα επίπεδα βιομαζών, που αντιστοιχούν στο PO πρόβλημα είναι μικρότερα από τα αντίστοιχα επίπεδα που αντιστοιχούν στο κοινωνικά βέλτιστο πρόβλημα SO, τόσο στην περίπτωση αποστροφής κινδύνου όσο και αβεβαιότητας, δηλαδή: $B_i^{PORA} < B_i^{SORA}$, $B_i^{POUA} < B_i^{SOUA}$
2. Τα αντίστοιχα επίπεδα προσπάθειας που πρέπει να αφιερωθούν και που αντιστοιχούν στο PO πρόβλημα, είναι μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα επίπεδα στο SO πρόβλημα, τόσο στην περίπτωση αποστροφής κινδύνου όσο και αβεβαιότητας, δηλαδή: $E_i^{PORA} > E_i^{SORA}$, $E_i^{POUA} > E_i^{SOUA}$
3. Η διαφορά στα βέλτιστα επίπεδα βιομαζών ανάμεσα στην περίπτωση αποστροφής κινδύνου και αβεβαιότητας και στα δύο προβλήματα, δηλαδή: $B_i^{PORA} - B_i^{POUA}$, $B_i^{SORA} - B_i^{SOUA}$, για μικρές βιομάζες είναι αρνητικός αριθμός που σημαίνει ότι γινόμαστε συντηρητικότεροι, ενώ για μεγάλες βιομάζες είναι θετικός αριθμός που σημαίνει επιθετικότερη συμπεριφορά.
4. Η διαφορά στα βέλτιστα επίπεδα προσπάθειας, $E_i^{PORA} - E_i^{POUA}$, $E_i^{SORA} - E_i^{SOUA}$, αναφορικά με ένα τοπικά ευσταθές μέγιστο σημείο που αντιστοιχεί σε μικρές βιομάζες, είναι θετικός αριθμός.
5. Η διαφορά ανάμεσα στα βέλτιστα επίπεδα βιομαζών και τις αντίστοιχες προσπάθειες, ανάμεσα στην περίπτωση αποστροφής κινδύνου και αποστροφής στην αβεβαιότητα, μπορούν να ερμηνευθούν σαν ένα μέτρο προφύλαξης απέναντι στην άγνοια και την αβεβαιότητα.

Ειδικότερα βάσει του σημείου 3, της παραπάνω Πρότασης, συμπεραίνουμε ότι όταν είμαστε στη λεκάνη (*basin*) έλξης που αντιστοιχεί σε μικρές βιομάζες, τότε είμαστε συντηρητικότεροι, ενώ αντίθετα για τη λεκάνη έλξης που αντιστοιχεί σε μεγάλες βιομάζες, γινόμαστε πιο επιθετικοί.⁴² Επομένως όταν για παράδειγμα κάποιο ακραίο φαινόμενο όπως για παράδειγμα το πρόσφατο Ελ-Νίνιο, προκαλέσει αφανισμό αρκετών βιομαζών και μεταφέρει το σύστημα μας από τη μία λεκάνη έλξης στην άλλη, τότε αναγκαστικά εμείς θα πρέπει αυτόματα να γίνουμε συντηρητικότεροι σε σχέση με την πολιτική που ακολουθούσαμε πριν την εκδήλωση του φαινομένου.

8.3 Ενδογενοποίηση του ϵ

Έστω, ότι ο ρυθμιστής προσπαθεί να βάλει σε εφαρμογή τη βέλτιστη σταθερής κατάστασης λύση, *OSS*, του προβλήματος *SO*, θέτοντας ένα γραμμικό φόρο,

⁴² Για παράδειγμα στην Εικόνα 14, το σημείο *H* είναι τοπικό μέγιστο που αντιστοιχεί σε μικρές βιομάζες, όπου η αντίστοιχη λεκάνη έλξης είναι η *HJ*, ενώ το *K* είναι το καθολικό μέγιστο, με λεκάνη έλξης την *JK*. Το σημείο *J* είναι τοπικό ελάχιστο. Αναλυτικότερη παρουσίαση του διαγράμματος θα δοθεί στο επόμενο υποκεφάλαιο.

έστω τ_i στην τιμή αγοράς p_i^m . Τότε, η *PO OSS* καθορίζεται από την εξίσωση:

$$\max_{B_1, B_2} \sum_{i=1}^2 (p_i^m(1 - \tau_i) - C(B_i))(-\delta B_i + w_i \tilde{g}_i f_i(B_i) - d_i B_i) \quad (8.34)$$

με συνθήκη πρώτης τάξης την:

$$\begin{aligned} p_i^m(1 - \tau_i) - \frac{p_i^m w_i g_i f'_i(B_i)}{\delta + d_i} \\ = C'(B_i)B_i + C(B_i) - \frac{w_i g_i (C(B_i) f'_i(B_i) + C'(B_i) f_i(B_i))}{\delta + d_i} \end{aligned} \quad (8.35)$$

Η παραπάνω συνθήκη επάγει ότι ο βέλτιστος φόρος τ_i , θα πρέπει να επιλέγει έτσι ώστε η λύση που αντιστοιχεί στο πρόβλημα (8.35) να συμπίπτει με εκείνη του (8.33). Ένας τρόπος να το καταφέρουμε αυτό είναι να συγκρίνουμε την παραπάνω σχέση με την (8.33), όπου βλέπουμε ότι η παρακάτω εξίσωση πρέπει να ικανοποιείται:

$$-p_i^m \tau_i = \frac{p_i}{-\delta - d_i} + \frac{w_i b_i \varepsilon_i (C(B_i) f'_i(B_i) + C'(B_i) f_i(B_i) - p_i^m f'_i(B_i))}{\delta + d_i}$$

με B_i να είναι η λύση της (8.33).

8.3.1 Η περίπτωση μεγάλων διαταραχών και ακραίων φαινομένων

Παρακάτω, λαμβάνουμε υπόψη ότι μεγάλες αιφνίδιες διαταραχές σε συνέργια με ακραία φαινόμενα δύναται να μετακινήσουν τις αρχικές συνθήκες από μία λεκάνη έλξης σε μία άλλη. Εξαιτίας της ειδικής μορφής της συνάρτησης κόστους όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο η λύση στις (8.16) και (8.19) είτε την (8.20) εναλλάσσονται. Έχουμε υποθέσει ότι (B_1^1, B_2^1) , (B_1^3, B_2^3) , είναι τοπικά μέγιστα και (B_1^2, B_2^2) είναι ένα ζεύγος από τοπικά ελάχιστα, με τα τοπικά μέγιστα να είναι ευσταθή σημεία ισορροπίας, ενώ τα τοπικά ελάχιστα ασταθή. Έστω, ότι μεγάλες διαταραχές με ακραία φαινόμενα μετακινούν με πιθανότητες, έστω $(1 - \pi_i)$, τις αρχικές τιμές B_i^0 για $i = 1, 2$ του συστήματός μας, στην αντίστοιχη συνιστώσα του ζεύγους που περιγράφει τη λεκάνη έλξης που αντιστοιχεί σε μικρές βιομάζες. Επομένως, με πιθανότητα $(1 - \pi_1)$ $(1 - \pi_2)$ το σύστημα μας θα κινηθεί στις λεκάνες έλξης που αντιστοιχούν σε μικρές βιομάζες. Υποθέτουμε, ότι δεν υπάρχει καθόλου αποστροφή στην αβεβαιότητα, επομένως $\varepsilon_i = 0$ και $g_i = \tilde{g}_i$. Τότε, το βέλτιστο πρόβλημα για το ρυθμιστή είναι να καθορίσει ένα βέλτιστο φόρο τέτοιο ώστε: ⁴³

$$\begin{aligned} \tau_i^* &= \arg \max \{ (1 - \pi_i) W(B_i^{1s}) + \pi_i W(B_i^{3s}) \}, i = 1, 2 \quad (8.36) \\ \text{με } W(B_i^{ks}) &= W(\delta_{1i} B_1^{ks}, \delta_{2i} B_2^{ks}, \delta_{1i} g_1, \delta_{2i} g_2), k = 1, 3 \text{ και } i = 1, 2 \\ \text{όπου } \delta_{kl} &= 1_{\{k=l\}} \text{ με το } W \text{ να δίνεται από την (8.16)} \end{aligned}$$

⁴³Το δ , παίρνει την τιμή ένα όταν οι δείκτες είναι ίδιοι, αλλιώς λαμβάνει την τιμή μηδέν. Οπότε, βάσει αυτής της παρατήρησης παίρνουμε την αντίστοιχη έκφραση για το W για κάθε μία από τις δύο βιομάζες βάσει της (8.16) και μετά λύνουμε το πρόβλημα (8.36).

Η γραφική παρουσίαση του ρυθμιζόμενου συστήματος παρέχεται από την εικόνα 14, στην οποία παρουσιάζεται η κατάσταση εκείνη όπου δύο μέγιστα σημεία εναλλάσσονται με ένα ελαχιστο. ⁴⁴ Τα σημεία H, J, K , έχουν επιλεγεί κατά τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε η λύση που αντιστοιχεί στο πρόβλημα (8.33) να είναι ίδια με τη λύση του προβλήματος (8.35). Ειδικότερα, το σημείο H είναι σημείο τοπικού μεγίστου το οποίο είναι ευσταθές και αντιστοιχεί σε μικρές βιομάζες. Το σημείο J είναι σημείο τοπικού ελαχίστου και είναι ασταθές, με τη λεκάνη HJ να είναι η λεκάνη έλξης που αντιστοιχεί σε μικρές βιομάζες. Το σημείο K , είναι σημείο μεγίστου το οποίο είναι και αυτό ευσταθές. Εδώ η λεκάνη έλξης αναφορικά σε αυτό είναι η JK .

Το παραπάνω πρόβλημα, δύναται να παρουσιαστεί κατά τέτοιο τρόπο που να είναι όμοιος με την ε -contamination διατύπωση.

Για να καθορίσουμε το βέλτιστο φόρο, έστω $F_{S_i}(z) = \text{Pr}(S_i > z)$ η συνάρτηση κατανομής μίας αιφνίδιας διαταραχής την οποία συμβολίζουμε με S_i . Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να πούμε ότι αν $B_i^0 + S_i < B_i^{2s}(\tau_i)$, όπου $(B_1^{2s}(\tau_1), B_2^{2s}(\tau_2))$ είναι οι τοπικά μη σταθερές καταστάσεις του ρυθμιζόμενου συστήματος, τότε το σύστημα μας θα μετακινηθεί στην τοπικά σταθερή χαμηλής βιομάζας κατάσταση $(B_1^{1s}(\tau_1), B_2^{1s}(\tau_2))$. Διαφορετικά, αν $B_i^0 + S_i > B_i^{2s}(\tau_i)$ τότε το σύστημα μας συγκλίνει στην υψηλής βιομάζας σταθερή κατάσταση $(B_1^{3s}(\tau_1), B_2^{3s}(\tau_2))$. Τότε το πρόβλημα βέλτιστης επιλογής φόρου ορίζεται από τη σχέση:

$$\max_{\tau_i} \sum_{i=1}^2 \{F_{S_i}(B_i^{2s}(\tau_i))W(B_i^{1s}) + (1 - F_{S_i}(B_i^{2s}(\tau_i)))W(B_i^{3s})\} \quad (8.37)$$

με συνθήκη πρώτης τάξης την:

$$\begin{aligned} 0 = & F_{S_i}(B_i^{2s}(\tau_i)) \frac{dB_i^{2s}(\tau_i)}{d\tau} (W(B_i^{1s}) - W(B_i^{3s})) + \\ & F_{S_i}(B_i^{2s}(\tau_i)) \frac{\partial W(B_i^{1s}(\tau_i))}{\partial B_i^{1s}} \frac{dB_i^{1s}(\tau_i)}{d\tau} \\ & + (1 - F_{S_i}(B_i^{2s}(\tau_i))) \frac{\partial W(B_i^{3s}(\tau_i))}{\partial B_i^{3s}} \frac{dB_i^{3s}(\tau_i)}{d\tau} \end{aligned} \quad (8.38)$$

Συγκρίνοντας την (8.37) με την (8.36) και την ε -contamination διατύπωση, βλέπουμε ότι οι παράμετροι ε_i τώρα καθορίζονται από την $F_{S_i}(B_i^{2s}(\tau_i))$ και έχουν ενδογενοποιηθεί αφού η πιθανότητα σύμφωνα με την οποία η φύση διαλέγει την λεκάνη έλξης που αντιστοιχεί σε μικρές βιομάζες εξαρτάται από την βέλτιστη επιλογή φόρου.

⁴⁴Οι συναρτήσεις R, P , δίνονται μέσω των συνθηκών πρώτης τάξης που δίνονται από την (8.35).

Σε αυτό το κεφάλαιο και με στόχο τη μελέτη της βιοπικιολότητας κάνοντας χρήση εννοιών βελτιστοποίησης, αρχικά εισάγαμε ένα στατικό μοντέλο με δύο βιομάζες το οποίο και επεκτείναμε στη συνέχεια σε ένα δυναμικό μοντέλο. Μελετήσαμε ένα ιδιωτικό και ένα κοινωνικό πρόβλημα βέλτιστης επιλογής, τόσο στην περίπτωση που αποστρεφόμεστε τον κίνδυνο όσο και στην περίπτωση εκείνη που αποστρεφόμεστε την αβεβαιότητα, όπου συγκρίναμε τη βέλτιστη ποσότητα βιομάζας που πρέπει να διατηρήσουμε στο οικοσύστημα όσο και την αντίστοιχη προσπάθεια που πρέπει να δαπανήσουμε για να επιτύχουμε αυτό. Ειδικότερα, συγκρίνοντας τις λύσεις μας ανάμεσα στο ιδιωτικό, *PO*, πρόβλημα και στο κοινωνικό, *SO*, βλέπουμε ότι η διάφορα ανάμεσα στις βέλτιστες ποσότητες των βιομαζών είναι αρνητικός αριθμός. Αναφορικά ως προς τις αντίστοιχες προσπάθειες που πρέπει να καταβληθούν, η διαφορά της πρώτης από τη δεύτερη είναι ένας θετικός αριθμός. Αν, τώρα, συγκρίνουμε τη διάφορα ανάμεσα στην αποστροφή κίνδυνου και αβεβαιότητας όπου στη δεύτερη περίπτωση έχουμε χρησιμοποιήσει την ε – *contamination* προσέγγιση για να διατυπώσουμε αυτή, βλέπουμε ότι για μικρές βιομάζες γινόμαστε πιο συντηρητικοί στην περίπτωση αποστροφής στην αβεβαιότητα, ενώ για μεγάλες γινόμαστε πιο επιθετικοί συγκρίνοντας τη λύση μας με την κλασική περίπτωση, όπου ο όρος επιθετικότερος σημαίνει μεγαλύτερο ποσοστό αλιείας. Επίσης, εξετάζοντας ένα ρυθμιστικό πρόβλημα στην περίπτωση που ο ρυθμιστής αντιμετωπίζει την πιθανότητα μεγάλων διαταραχών με ακραία φαινόμενα, περιγράφουμε τη λύση μας με τέτοιο τρόπο ώστε η παράμετρος που δείχνει την σιγουριά μας στο αρχικό μοντέλο αναφοράς να έχει ενδογενοποιηθεί. Το άνω μοντέλο μπορεί να επεκταθεί θεωρώντας αλληλεπιδράσεις μεταξύ των δύο βιομαζών.

9 Εφαρμογή των παραπάνω στο διαδίκτυο

Ένας από τους χώρους ο οποίος χαρακτηρίζεται από ιδιαίτερα έντονη αβεβαιότητα και ο οποίος τα τελευταία χρόνια έχει αποκτήσει εξαιρετικά σημαντική σημασία για τον άνθρωπο και την εξέλιξη της ζωής πάνω στον πλανήτη, λόγω του ιδιαίτερα σημαντικού αριθμού εφαρμογών οι οποίες λαμβάνουν χώρα σε αυτόν, είναι αυτός του διαδικτύου.⁴⁵ Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά τα οποία διέπει την εξέλιξη αρκετών διαδικασιών και φαινομένων τα οποία καθημερινά λαμβάνουν χώρα στο δίκτυο είναι η έντονη αβεβαιότητα που έχουμε σχετικά με αυτά. Επομένως, επιτακτική κρίνεται η ανάγκη να ενσωματώσουμε αυτή στην διαδικασία επιλογής και λήψης αποφάσεων οι οποίες σχετίζονται με διαδικασίες που διαδραματίζονται στο χώρο αυτό. Προσαρμόζοντας, λοιπόν, κατάλληλα τα αποτελέσματα μας στις προηγούμενες ενότητες είμαστε σε θέση να τα εφαρμόσουμε άμεσα στο διαδίκτυο.

9.1 Συναλλαγές μέσω διαδικτύου

Η αλματώδης τεχνολογική πρόοδος είχε σαν αποτέλεσμα τα τελευταία χρόνια το διαδίκτυο να γίνει προσιτό και ευρέως διαδεδομένο στο κόσμο. Αυτό, είχε ως αποτέλεσμα να αλλάξει σε μεγάλο βαθμό ο παραδοσιακός τρόπος συναλλαγών και επενδύσεων του καθενός από εμάς. Πολλές συναλλαγές αγορές και επενδύσεις πραγματοποιούνται πλέον καθημερινά από το διαδίκτυο. Πάρτε για παράδειγμα αγορές βιβλίων ειδών επένδυσης ακόμα και σπιτιών που αγοράζονται χωρίς να τα έχουμε ποτέ δει από κοντά. Περισσότερο ή λιγότερο οργανωμένες αγορές έχουν δημιουργηθεί, τόσο από έλληνες όσο και ξένους επιχειρηματίες, που στόχο έχουν να διεκδικήσουν ένα σημαντικό μέρος των παραδοσιακών μας συναλλαγών. Βλέπουμε, λοιπόν, τις τιμές κάποιων αγαθών ή υπηρεσιών να μεταβάλλονται συνεχώς, σαν να επρόκειτο για μία παραδοσιακή αγορά.

Πολλά λοιπόν από τα αγαθά τα οποία εμείς συχνά αγοράζουμε από το δίκτυο χωρίς να τα έχουμε δει από κοντά ή καλύτερα τα βλέπουμε μόνο από κάποιες φωτογραφίες, σίγουρα εμπεριέχουν υψηλά επίπεδα αβεβαιότητας. Από τα παραπάνω φαίνεται ότι πρέπει να ενσωματώσουμε την αβεβαιότητα στη διαδικασία λήψης αποφάσεων μας. Άρα, εδώ, σε αρκετές εκ των περιπτώσεων ιδιαίτερα, δε, όταν τα αγαθά προορίζονται για επένδυση μπορούμε να εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα των προηγούμενων ενότητων, όπου ανάλογα με την αβεβαιότητα που έχουμε, θα πρέπει να χρησιμοποιούμε ένα διαφορετικό θ για τον καθορισμό του σκοπού επένδυσης, το οποίο αντικατοπτρίζει τα διαφορετικά επίπεδα.

⁴⁵Ενδεικτικά μπορεί κάποιος να δει, [2], [15] [45], [72]

9.2 Επιλογή μετοχών νέων τεχνολογιών

Ένα άλλο θέμα, για το οποίο έγινε ιδιαίτερη αναφορά και απασχόλησε εκτενώς την προηγούμενη επταετία τόσο τον απλό λαό όσο και τους επαγγελματίες διαχειριστές κεφαλαίων, ήταν αυτό της επιλογής μετοχών που έχουν σαν αντικείμενο δραστηριοποίησης τους εφαρμογές που σχετίζονται με το δίκτυο. Ειδικότερα, είδαμε τους επενδυτές να επιλέγουν αρχικά μαζικά την επένδυση σε αυτές τις εταιρίες ενώ μετέπειτα να τις αποφεύγουν. Ένα άλλο ερώτημα που βασάνιζε αυτούς ήταν πια είναι η καταλληλότερη μεταξύ αυτών των εταιριών όταν είχαν αποφασίσει πιο ποσό θα επένδυαν σε εταιρίες νέων τεχνολογιών. Κύριο, δε, χαρακτηριστικό αυτών ήταν η μεγάλη αβεβαιότητα που σχετίζονταν αναφορικά με την εξέλιξη της τιμής τους. Άρα, είναι ενδιαφέρον να δούμε πως συνδέεται η θεωρία μας με τη λήψη αποφάσεων, σχετικά με την επιλογή για επένδυση σε αυτές τις εταιρίες.

Ειδικότερα, εκείνα τα χρόνια αρχικά παρατηρήθηκε μία εντυπωσιακή αύξηση στα ποσά επένδυσης σε αυτές τις εταιρίες τόσο στη χώρα μας όσο και στον διεθνή χώρο. Επίσης, οι επενδυτές κάθε χώρας συχνότερα επέλεγαν αξίες που διαπραγματεύονται στη δικιά τους αγορά. Εδώ, είδαμε οι τιμές των μετοχών όλων των εταιριών χωρίς καμία εξαίρεση να ανεβαίνουν κάτι το οποίο φαινομενικά δεν ήταν και τόσο φυσιολογικό. Στην συνέχεια, όμως, οι δείκτες αυτών των μετοχών είδαμε να «καταρρέουν» όπως για παράδειγμα ο τεχνολογικός δείκτης *Nasdaq* στο χρηματιστήριο της Νέας Υόρκης. Αλλά, ούτε εδώ τα πράγματα ήταν καλύτερα. Πολλές από τις εταιρίες αυτές διαπραγματεύονται σήμερα και τους τελευταίους μήνες γενικότερα σε τιμές κάτω του ενός ευρώ, που αντιστοιχεί σε ποσοστό λιγότερο του 1/10 της μέγιστης τιμής τους.

Μια πιθανή εξήγηση στα πλαίσια του υποδείγματος μας είναι η παρακάτω: Παρ' όλο που οι επενδυτές ήταν «*uncertainty averse*», δηλαδή αποστρεφόταν την αβεβαιότητα, όπως και θα αναμενόταν επειδή οι εταιρίες ήταν άγνωστες ως προς το πεδίο δραστηριοποίησης τους και χαρακτηριζόταν από «*model uncertainty*», δηλαδή δεν μπορούσαμε να μοντελοποιήσουμε την εξέλιξη της τιμής τους με σιγουριά θα ήταν δικαιολογημένη μία συντηρητικότερη συμπεριφορά. Αυτό που οδηγούσε τους επενδυτές να επενδύσουν περισσότερα χρήματα σε αυτές τις καινούργιες και σχετικά άγνωστες σε αυτούς εταιρίες, από ότι σε κάποιες άλλες παραδοσιακότερες αξίες, βάσει του θεωρητικού υπόβαθρου που αναπτύξαμε, ήταν πιθανόν η δομή των παραμέτρων, δηλαδή η μέση αναμενόμενη τιμή και η τυπική απόκλιση που έδινε αυτή την επιθετικότερη συμπεριφορά, που όπως είδαμε είναι ανεξάρτητη της τιμής της παραμέτρου ευστάθειας. Στο ίδιο γεγονός, δηλαδή στη δομή των παραμέτρων οφειλόταν και το γεγονός ότι όλες οι τιμές των μετοχών του κλάδου, ενώ σίγουρα όλες οι εταιρίες δεν ήταν ίδιες και δεν είχαμε ίδια πληροφόρηση και σιγουριά για αυτές μία και πολλές ήταν εξαιρετικά νέες, κινούταν ταυτόχρονα ανοδικά. Όταν οι παράμετροι μεταβλήθηκαν και άρχισαν να κινούνται προς την αντίθετη κατεύθυνση αυτό έγινε για όλες τις εταιρίες του κλάδου ταυτόχρονα.

Οι αλγόριθμοι και οι κώδικες για την επιλογή χαρτοφυλακίου κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας με βάση το θεωρητικό υπόβαθρο που αναπτύξαμε μπορούν να προσαρμοστούν κατάλληλα στην φύση του προβλήματος που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε και να γίνουν εργαλεία στο διαδίκτυο. Στο παράρτημα παρατίθενται οι κώδικες, όπου μπορούν να αντικατασταθούν οι τιμές των παραμέτρων ώστε να έχουμε αποτελέσματα.

Είδαμε, λοιπόν, ότι προσαρμόζοντας κατάλληλα τα αποτελέσματα μας μπορούν να εφαρμοστούν και σε άλλους τομείς όπως το διαδίκτυο.

10 Συμπεράσματα

Ο *Knight* ήταν ο πρώτος ο οποίος εξέφρασε την άποψη ότι η αβεβαιότητα, δηλαδή η μη ύπαρξη ενός αντικειμενικού μέτρου πιθανότητας για την περιγραφή ενός φαινομένου, είναι αυτή η οποία χαρακτηρίζει την πλειονότητα των οικονομικών εφαρμογών. Εκείνος ήταν ο πρώτος που απέδωσε τον όρο αυτό για το διαχωρισμό των παραπάνω προβλημάτων, από τα προβλήματα κινδύνου, τα οποία χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη μίας αντικειμενικής κατανομής πιθανότητας για την περιγραφή ενός γεγονότος.

Ο μη διαχωρισμός των διαφόρων προβλημάτων που αντιμετωπίζονταν στην οικονομική θεωρία είχε σαν αποτέλεσμα πολλές φορές τα αποτελέσματα, τα οποία έδιναν τα θεωρητικά μοντέλα, να είναι σε ασυνέπεια με τα πειραματικά αποτελέσματα και τα πραγματικά γεγονότα τα οποία εμφανίζονταν στη φύση. Το γεγονός αυτό είχε σαν αποτέλεσμα αυτοί οι οποίοι έπρεπε να λάβουν κάποια απόφαση ή να χαράξουν κάποια πολιτική να αρχίσουν να ενσωματώνουν την αβεβαιότητα την οποία και αποστρέφονταν, όπως και τον κίνδυνο, στα μοντέλα αποφάσεων, τα οποία δημιουργούσαν για την περιγραφή και ερμηνεία των προβλημάτων που καλούνταν να αντιμετωπίσουν. Πολλές ήταν οι προσεγγίσεις, οι οποίες είχαν ακολουθηθεί κατά το παρελθόν, η εργασία, όμως η οποία θεμελίωσε αξιωματικά την αποστροφή στην αβεβαιότητα (*Uncertainty Aversion*) και η οποία αποτέλεσε κατά κάποιο τρόπο ορόσημο, αναφορικά με τη σύγχρονη μεθοδολογία που ακολουθείται για την αντιμετώπιση τέτοιου είδους καταστάσεων και προβλημάτων ήταν αυτή των *Gilboa* και *Schmeidler* [31].

Έπειτα, λοιπόν, από την παραπάνω εργασία όλοι προσπαθούσαν να είναι σε συμφωνία με το αξίωμα της αποστροφής στην αβεβαιότητα στις προσεγγίσεις και μεθοδολογίες τις οποίες έχουν αναπτύξει έως σήμερα. Δύο, όμως, είναι οι κύριες προσεγγίσεις, οι οποίες έχουν κατά κάποιο τρόπο κυριαρχήσει στην παραπάνω βιβλιογραφία. Τα μοντέλα με πολλαπλά μέτρα πιθανότητας και η θεωρία του ευσταθούς ελέγχου.

Τα μεν πρώτα μοντέλα (*multiple priors models*), έχουν εισαχθεί πρώτα στην βιβλιογραφία από τους *Epstein* και *Wang* [25], με τους δύο σημαντικότερους και πλέον διαδεδομένους εκπροσώπους αυτών των μοντέλων να είναι η ϵ – *contamination* προσέγγιση και η *k-ignorance* μεθοδολογία. Στη μεν πρώτη προσέγγιση ο λήπτης αποφάσεων διατυπώνει την αντικειμενική του συνάρτηση δίνοντας πιθανότητα $(1 - \epsilon)$ σε ένα βασικό μέτρο πιθανότητας και ϵ στο *infimum* μίας οικογένειας μέτρων πιθανότητας. Η μεν άλλη *k – ignorance* μεθοδολογία περιορίζει το σύνολο των μοντέλων, τα οποία ο λήπτης αποφάσεων θεωρεί κάθε στιγμή.

Την άλλη προσέγγιση αποτελεί η χρήση μεθόδων ευσταθούς ελέγχου (*tobust control*), οι οποίες εισήχθησαν για πρώτη φορά σε οικονομικές εφαρμογές από τους *Hansen* και *Sargent* [32]. Σύμφωνα με αυτή την εκδοχή, ο λήπτης αποφάσεων είναι αβέβαιος για το αρχικό του μοντέλο από την άποψη ότι υπάρχει ένα μεγάλο σύνολο προσεγγιστικών μοντέλων, τα οποία μπορούν επίσης να

θεωρηθούν ως πιθανά, δεδομένου ενός αρχικού συνόλου στοιχείων-δεδομένων, τα οποία χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση του αρχικού μας μοντέλου. Το σύνολο αυτών των μοντέλων λαμβάνεται διαταράσσοντας κάποιο αρχικό μοντέλο αναφοράς (Benchmark model), όπου οι πιθανές διαταραχές αντικατοπτρίζουν το σύνολο των πιθανών κατανομών που ο λήπτης αποφάσεων είναι πρόθυμος να θεωρήσει ή εναλλακτικά το πόσο σίγουρος είναι για το αρχικό του μοντέλο αναφοράς. Στο πρόβλημα ευσταθούς έλεγχου που προκύπτει με τον τρόπο αυτό, ο στόχος είναι να λάβουμε ένα κανόνα ή αλλιώς να πάρουμε μία απόφαση, η οποία θα ισχύει για ένα σύνολο προσεγγιστικών μοντέλων, κοντά κατά μία έννοια στο μοντέλο αναφοράς.

Η μελέτη της λήψης αποφάσεων κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας την οποία εμείς αποστρεφόμεστε αποτελεί το θέμα της παρούσας διδακτορικής διατριβής. Σαν πεδία εφαρμογών έχουμε επιλέξει τη διαχείριση χαρτοφυλακίου και συγκεκριμένα τη μελέτη του προβλήματος βέλτιστης επιλογής χαρτοφυλακίου του *Merton*, καθώς, επίσης και τη διαχείριση οικοσυστημάτων ως προς τη διατήρηση και διαχείριση της βιοποικιλότητας στη φύση. Τέλος, δείχνουμε ότι τα αποτελέσματα μπορούν να εφαρμοστούν και σε άλλους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας όπως το διαδίκτυο.

Ειδικότερα για τη μελέτη της βέλτιστης επιλογής χαρτοφυλακίου χρησιμοποιούμε τη μεθοδολογία του ευσταθούς ελέγχου, για να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα μας με εκείνα που αντιστοιχούν στην περίπτωση ενός κλασικού οικονομικού περιβάλλοντος. Αφετέρου, για τη μελέτη της βιοποικιλότητας, αναπτύσσουμε δύο μοντέλα στα οποία την πρώτη φορά που προσπαθούμε να κάνουμε σύγκριση με την περίπτωση αποστροφής κίνδυνου, η αβεβαιότητα έχει διατυπωθεί βάσει της *k-ignorance* μεθοδολογίας, ενώ στην επόμενη βάσει της ϵ – *contamination* προσέγγισης.

Αρχικά, ασχολήθηκαμε με τη διατύπωση και διεξοδική μελέτη του προβλήματος βέλτιστης επιλογής χαρτοφυλακίου του *Merton* [53], [54] σαν ένα πρόβλημα ευσταθούς ελέγχου. Ως προς αυτό στηριζόμενοι στη θεωρία όπως αυτή διατυπώθηκε από τους *Hansen* και *Sargent*, είχαν ασχοληθεί ως τότε ο *Maehout* [52] και οι *Uppal* και *Wang* [73]. Αυτοί όμως στην προσπάθεια τους να λύσουν αναλυτικά το πρόβλημα κάνουν χρήση ενός ομοθετικού επιχειρήματος που με τον τρόπο αυτό όμως μετατρέπουν την εξωγενή παράμετρο θ , η οποία χρησιμοποιείται για να δείξει πόσο βέβαιο είμαστε ως προς το μοντέλο αναφοράς, σε συνάρτηση της συνάρτησης αξίας του προβλήματος, ενδογενοποιώντας την έτσι με τον τρόπο αυτό, γεγονός που έχει σαν αποτέλεσμα να σπάσει ο σύνδεσμος με τους *Gilboa*, *Schmeidler* και την αξιωματική θεμελίωση του *Uncertainty Aversion*. Εναλλακτικά σε αυτές είναι η εργασία του *Pathak* [59], με την χρήση της *k – ignorance* μεθοδολογίας, που έχει ως αποτέλεσμα να πάρει απλά ένα κανόνα σαν αυτό του *Merton* με μικρότερη μέση αναμενόμενη τιμή.

Ένα από τα κύρια συμπεράσματα που προέκυπταν σαν αποτέλεσμα της εφαρμογής της θεωρίας του ευσταθούς έλεγχου, είναι ότι η επιθυμία για έλεγχο της ευστάθειας του μοντέλου συνήθως οδηγεί σε συντηρητικότερη συμπερι-

φορά.

Αρχικά, κάνοντας χρήση της θεωρίας του ευσταθούς ελέγχου αντιμετωπίσαμε το πρόβλημα βέλτιστης επιλογής χαρτοφυλακίου του *Merton* λαμβάνοντας υπόψη την ύπαρξη αβεβαιότητας και εξετάσαμε αν και πότε η θεωρία οδηγεί σε επιθετικότερη συμπεριφορά συγκριτικά με το παραδοσιακό μοντέλο που αντιστοιχεί στην περίπτωση αποστροφής κινδύνου. Οι ευσταθείς κανόνες που λάβαμε παραμετροποιήθηκαν με τη βοήθεια της παραμέτρου ευστάθειας θ . Τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι ανεξάρτητα των τιμών αυτής της παραμέτρου, η οποία δεν ενδογενοποιείται, όπως στις παραπάνω εργασίες και με τον τρόπο αυτό δεν σπάει ο σύνδεσμος με τους *Gilboa Schmeidler*. Αναλύσαμε προβλήματα τα οποία ορίζονται με τη βοήθεια πολλαπλασιαστή (*multiplier*). Αυτά σχετίζονται με τα προβλήματα που ορίζονται με τη χρήση κάποιου περιορισμού, (*constraint*). Με τον τρόπο αυτό οι προτιμήσεις που ορίζουν τα προβλήματα με πολλαπλασιαστή είναι σε συνέπεια με το αξίωμα του *Uncertainty Aversion* και βάσει του *Wang*, [77], [78], έχουν θεμελιωθεί αξιωματικά και είναι σε συνέπεια με τον *Elsberg*, οπότε αναλύσαμε ένα πρόβλημα επιλογής χαρτοφυλακίου που είναι σε πλήρη συνέπεια με τη συμπεριφορά κατά *Elsberg*.

Ειδικότερα, στο κεφάλαιο 3 αντιμετωπίσαμε τη γενική περίπτωση του μοντέλου μας με μία αξία σταθερής απόδοσης και n το πλήθος αξίες όπου η εξέλιξη της τιμής τους χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα, όπου για $n = 1$ δώσαμε την αριθμητική επίλυση για μία *CRRA* συνάρτηση χρησιμότητας.

Στο κεφάλαιο 4 αρχικά με δύο αξίες που χαρακτηρίζονται από ίδια επίπεδα αβεβαιότητας, δείξαμε ότι είναι δυνατόν να αυξήσουμε τα επενδύμενα διαθέσιμα στη μία μόνο από τις δύο αξίες στην περίπτωση που έχουμε υψηλή τιμή του συντελεστή συσχέτισης συγκρινόμενα με αυτά του τύπου του *Merton* και επιλύσαμε πάλι αριθμητικά για την ίδια συνάρτηση χρησιμότητας. Επιπλέον, στην περίπτωση αυτή αποδείξαμε συνθήκες μεταξύ των τιμών των παραμέτρων του προβλήματος, η ικανοποίηση των οποίων δύναται να οδηγήσει σε επιθετικότερη συμπεριφορά σε σχέση με την κλασσική περίπτωση. Επίσης, αντιμετωπίσαμε την περίπτωση διαφορετικών επιπέδων αβεβαιότητας μεταξύ των αξιών και λύσαμε το γενικό πρόβλημα για n το πλήθος αξίες. Εδώ αποδείξαμε πάλι ότι στην περίπτωση δύο αξιών, είναι δυνατή η αύξηση των επενδυόμενων διαθέσιμων συγκριτικά με τον κλασσικό τύπο και δώσαμε μέσω των αποτελεσμάτων, μία εξήγηση για το «*home bias puzzle*».

Στη συνέχεια στο κεφάλαιο 5, θεωρώντας στοχαστικό σύνολο επενδυτικών επιλογών αρχικά αντιμετωπίσαμε το πρόβλημα με μία αξία με σταθερή απόδοση και μία όπου χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα. Στη συνέχεια επεκτείναμε αυτό θεωρώντας και δεύτερη αξία που εμπεριέχει αβεβαιότητα. Στην ανάλυση που κάναμε θεωρήσαμε τόσο ίδιους όσο και διαφορετικούς όρους διαταραχής. Δηλαδή στη μία περίπτωση η αβεβαιότητα υποθέσαμε ότι οφείλεται σε γενικούς μακροοικονομικούς παράγοντες και είναι ίδια για όλες τις αξίες και τις στοχαστικές παραμέτρους αυτών, ενώ στην άλλη η αβεβαιότητα θεωρήσαμε ότι οφείλεται σε μικροοικονομικούς παράγοντες και είναι διαφορετική.

Στην περίπτωση με μία αξία που δεν χαρακτηρίζεται από σταθερή απόδοση αποδείξαμε κανόνες σύμφωνα με τους οποίους δεν γινόμαστε επιθετικότεροι σε σχέση με την περίπτωση αποστροφής κινδύνου. Στην περίπτωση δύο αξιών και ίδιων επιπέδων αβεβαιότητας αποδεικνύουμε ότι δύναται να έχουμε επιθετικότερη συμπεριφορά στη μία από τις δύο αξίες μόνο, όσο επίσης και στο σύνολο αλλά ποτέ και στις δύο αξίες ταυτόχρονα. Αυτή η επιθετικότερη συμπεριφορά που για πρώτη φορά αποδεικνύεται σε προβλήματα διαχείρισης χαρτοφυλακίου οφείλεται στη δομή της αβεβαιότητας σε συνάρτηση με την κατάλληλη δομή των παραμέτρων του προβλήματος, αποτέλεσμα που είναι σε συμφωνία με πρόσφατα αποτελέσματα αναφορικά με τη μακροοικονομική θεωρία [58]. Τέλος, θεωρώντας αποστροφή στην αβεβαιότητα ως προς την εξέλιξη της τιμής μίας μόνο αξίας, τόσο στην περίπτωση ίδιων όσο και διαφορετικών επιπέδων αβεβαιότητας, δείχνουμε ότι είναι πιο πιθανό να έχουμε πιο επιθετική συμπεριφορά στην αξία όπου πιστεύουμε ότι γνωρίζουμε την εξίσωση εξέλιξη της τιμής της, αποτέλεσμα το οποίο δίνει ξανά μία εξήγηση για το «home bias puzzle».

Η διατήρηση της βιοποικιλότητας, η οποία είναι βασική για την εύρυθμη μελλοντική ζωή στον πλανήτη, αποτελεί το δεύτερο κομμάτι εφαρμογής μας. Η εξαφάνιση ειδών που μπορεί να επιταχυνθεί από τα συνήθως υψηλά επίπεδα αβεβαιότητας και άγνοιας για την πραγματική κατανομή που περιγράφει κάποιο φυσικό φαινόμενο, παράλληλα με ακραία σενάρια και γεγονότα, όταν αυτά συνδυαστούν με όχι κατάλληλες ανθρώπινες ενέργειες στον τομέα της διαχείρισης, δημιουργεί την ανάγκη να ελέγξουμε τα δυναμικά του συστήματος κάτω από αβεβαιότητα και ακραία σενάρια.

Ειδικότερα, για να καλύψουμε την παραπάνω ανάγκη αναπτύξαμε δύο διαφορετικά μοντέλα, όπου στο πρώτο εξ αυτών δεν κάναμε χρήση εννοιών βελτιστοποίησης, στο οποίο προσδιορίσαμε ασφαλείς κανόνες για τη διατήρηση της βιοποικιλότητας στο οικοσύστημα, η εφαρμογή των οποίων εγγυάται ότι κάποια είδη δεν θα οδηγηθούν σε εξαφάνιση. Στο δεύτερο, κάνοντας χρήση εννοιών βελτιστοποίησης αναπτύξαμε ένα μοντέλο για τη σωστότερη διαχείριση της βιοποικιλότητας, το οποίο αναλύσαμε τόσο στην κλασική περίπτωση όσο και στην περίπτωση ύπαρξης αβεβαιότητας, όπου αποδείξαμε ότι η ύπαρξη αβεβαιότητας είναι πιθανόν σε συνέργεια με τις παραμέτρους του προβλήματος μας να αντιστρέψει τις αποφάσεις και την πολιτική του διαχειριστή του οικοσυστήματος.

Πιο συγκεκριμένα, αναφορικά ως προς το πρώτο πρόβλημα, αναπτύξαμε κανόνες σύμφωνα με τους οποίους διατηρούμε τη βιοποικιλότητα, τόσο σε καταστάσεις κάτω από βεβαιότητα καθώς επίσης και αβεβαιότητα σε ένα περιβάλλον όπου ένα μέρος γης κατανέμεται σε κάθε ένα είδος και όπου τα είδη καλλιεργούνται και αλιεύονται. Αρχικά παρουσιάσαμε ένα ντετερμινιστικό μοντέλο με δύο είδη, όπου επιτρέψαμε αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ειδών, το οποίο στη συνέχεια επεκτείναμε εισάγοντας σε αυτό αβεβαιότητα. Στη συνέχεια αντιμετωπίσαμε τόσο την περίπτωση με δύο όσο και με n το πλήθος βιομάζες, όπου προσδιορίσαμε άνω και κάτω φράγματα, για τις πιθανότητες

των δύο βιομαζών να είναι σε υψηλότερα επίπεδα από μία προαποφασισμένη αναλογία των αρχικών τους τιμών, τα οποία εξαρτιούνται καθοριστικά από την επιλογή των κανόνων αλιείας και την κατανομή γης. Παρακάτω θεωρώντας ότι αυτός που καλείται να λάβει μία απόφαση αντιμετωπίζει αβεβαιότητα κατά *Knight*, υιοθετώντας την *k – Ignorance* μεθοδολογία, δείξαμε πως επηρεάζεται ο καθορισμός των παραπάνω φραγμάτων. Η διάφορα, δε, στις τιμές των φραγμάτων στις δύο περιπτώσεις, ερμηνεύεται σαν ένα μέτρο της precautionary principle, στη διαχείριση βιοποικιλότητας. Ένα ενδιαφέρον σημείο που πρέπει να τονιστεί εδώ είναι ότι τα αποτελέσματα μας είναι σε συνέπεια με αυτά της διαχείρισης χαρτοφυλακίου. Ειδικότερα, όπως εκεί δεν αυξάναμε ποτέ τα διαθέσιμα και στις δύο αξίες ταυτόχρονα, έτσι και εδώ η αβεβαιότητα δεν οδηγεί ποτέ τη μεταβολή στα φράγματα, αναφορικά με τις δύο βιομάζες στην ίδια κατεύθυνση.

Στο δεύτερο κομμάτι, στην προσπάθεια μας να προστατευτούμε απέναντι στην άγνοια και την αβεβαιότητα ως προς το μοντέλο αναφοράς, η οποία τώρα έχει διατυπωθεί με την χρήση της *ε – contamination* προσέγγισης, κάναμε χρήση εννοιών βελτιστοποίησης.

Ειδικότερα, αφού εισάγαμε ένα στατικό μοντέλο με δύο βιομάζες στο οποίο είδαμε ότι η αποστροφή στην αβεβαιότητα μπορεί να οδηγήσει σε αντιστροφή της απόφασης του κοινωνικού σχεδιαστή, επεκτείναμε αυτό σε δυναμικό πλαίσιο. Συγκεκριμένα, αντιμετωπίσαμε ένα ιδιωτικό και ένα κοινωνικά βέλτιστο πρόβλημα τόσο στην κλασσική περίπτωση αποστροφής κινδύνου όσο και αποστροφής στην αβεβαιότητα, όπου εξετάσαμε πως η ύπαρξη αβεβαιότητας επηρεάζει τα βέλτιστα επίπεδα βιομαζών που θα πρέπει να διατηρήσουμε στο οικοσύστημα και τις αντίστοιχες προσπάθειες που πρέπει να καταβάλουμε για να επιτύχουμε αυτά. Εδώ τα κύρια αποτελέσματα μας είναι τα ακόλουθα: Τα βέλτιστα επίπεδα βιομαζών, που αντιστοιχούν στο *PO* πρόβλημα είναι μικρότερα από τα αντίστοιχα επίπεδα που αντιστοιχούν στο κοινωνικά βέλτιστο πρόβλημα *SO*, με τη διαφορά στις αντίστοιχες προσπάθειες να έχει θετικό πρόσημο. Η διαφορά στα βέλτιστα επίπεδα βιομαζών ανάμεσα στην περίπτωση αποστροφής κινδύνου και αβεβαιότητας και στα δύο προβλήματα, για μικρές βιομάζες είναι αρνητικός αριθμός που σημαίνει ότι γινόμαστε συντηρητικότεροι, ενώ για μεγάλες βιομάζες είναι θετικός αριθμός που σημαίνει επιθετικότερη συμπεριφορά. Εδώ, η διαφορά στις αντίστοιχες προσπάθειες, αναφορικά με ένα τοπικά ευσταθές μέγιστο σημείο που αντιστοιχεί σε μικρές βιομάζες είναι θετικός αριθμός. Επιπλέον οι διαφορές στις τιμές ανάμεσα στις δύο περιπτώσεις, δηλαδή της κλασσικής προσέγγισης όπου ο λήπτης αποφάσεων δεν αποστρέφεται την αβεβαιότητα και της αποστροφής στην αβεβαιότητα, μπορούν να παρασταθούν σαν ένα μέτρο προφύλαξης απέναντι στην αβεβαιότητα σχετικά με το μοντέλο αναφοράς. Τέλος, εξετάσαμε ένα ρυθμιστικό πρόβλημα και προσδιορίσαμε τη λύση αυτού σε μία μορφή όπου οι παράμετροι που δείχνουν κατά πόσο πιστεύουμε στο αρχικό μοντέλο έχουν ενδογενοποιηθεί.

Τα αποτελέσματα αυτά, με κατάλληλη προσαρμογή βρίσκουν εφαρμογή και σε άλλα πεδία οικονομικού ενδιαφέροντος, όπως αυτό του διαδικτύου.

Κλείνοντας στην παρούσα διδακτορική διατριβή αρχικά διατυπώσαμε το πρόβλημα βέλτιστης επιλογής χαρτοφυλακίου του *Merton* σαν ένα πρόβλημα ευσταθούς δυναμικού ελέγχου, μελετήσαμε αυτό και αποδείξαμε συνθήκες σχετικά με τη δομή της αβεβαιότητας και τις παραμέτρους του μοντέλου μας, οι οποίες επάγουν επιθετικότερη συμπεριφορά συγκριτικά με το κλασσικό οικονομικό περιβάλλον. Τα αποτελέσματα που λάβαμε μας βοήθησαν επίσης, να εξηγήσουμε και κάποια παράδοξα που δεν είναι εύκολο να εξηγήσει η κλασσική θεωρία. Στη συνέχεια αναπτύξαμε μοντέλα για τη διαχείριση και διατήρηση της βιοπικιιλότητας, χρησιμοποιώντας την *k-ignorance* και την *ε-contamination* προσέγγιση και εξετάσαμε την επίδραση που έχει η αποστροφή στην αβεβαιότητα στα μοντέλα διαχείρισης της βιοπικιιλότητας στη φύση. Τέλος, είδαμε ότι με κατάλληλη προσαρμογή, τα αποτελέσματα μπορούμε να τα εφαρμόσουμε και σε άλλους τομείς, όπως αυτόν του διαδικτύου.

Σαν επιστέγασμα των παραπάνω και αναφορικά με τη συμβολή αυτής της διδακτορικής διατριβής στην επιστήμη, μπορεί να αναφερθεί ότι η παρούσα διδακτορική διατριβή συμβάλλει στην κατανόηση του τρόπου με τον οποίο επιδρά η αποστροφή στην αβεβαιότητα στη θεωρία αποφάσεων και ειδικότερα στους τομείς επιλογής χαρτοφυλακίου και διαχείρισης οικοσυστημάτων. Επιπλέον, προσφέρει ένα μεθοδολογικό πλαίσιο για την ανάλυση παρόμοιων προβλημάτων και σε άλλα πεδία της οικονομικής επιστήμης.

11 Παράρτημα

Απόδειξη της Πρότασης 4.2.1 Υποθέτουμε, ότι έχουμε n διαφορετικούς όρους h_i για $i = 1, \dots, n$ και θεωρούμε επίσης ότι οι αντίστοιχες παράμετροι ευστάθειας συμβολίζονται με θ_i . Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση που περιγράφει το χαρτοφυλάκιο του επενδυτή δύναται να γραφεί ως:

$$dW = \left(rW - c + \sum_{i=1}^n w_i(\alpha_i - r)W + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i R_{ij} w_i W h_j \right) dt + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_j \sigma_j W R_{ij} d\hat{B}_i \quad (11.1)$$

Τότε, το αντίστοιχο πολλαπλασιαστικό πρόβλημα ευσταθούς ελεγχου είναι το παρακάτω:

$$J(\theta) = \sup_{w_i, C} \inf_{h_i} \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} [U(C) + \sum_{i=1}^n \theta_i \frac{h_i^2}{2}] dt \quad (11.2)$$

μ.π. (11.1).

με $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$. Η συνάρτηση αξίας $V(W, \theta)$, που αντιστοιχεί στο παραπάνω πρόβλημα ακολουθεί την παρακάτω εξίσωση:

$$\delta V = \max_{w_i, C} \min_{h_i} \left\{ U(C) + \left(rW - c + \sum_{i=1}^n w_i(\alpha_i - r)W + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i R_{ij} w_i W h_j \right) V_W + \sum_{i=1}^n \theta_i \frac{h_i^2}{2} + \frac{1}{2} V_{WW} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} W^2 \right\}. \quad (11.3)$$

με τις συνθήκες πρώτης τάξης αυτής να ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$U'(C) = V_W \quad (11.4)$$

$$h_i = -\frac{V_W W \sum_{j=1}^n w_j \sigma_j R_{ji}}{\theta_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (11.5)$$

$$\sum_{j=1}^n w_j W \sigma_{ij} = A(\alpha_i - r) + A \sigma_i \sum_{j=1}^n h_j R_{ij}, \quad i = 1, \dots, n \quad (11.6)$$

$$A = -\frac{V_W}{V_{WW}} = -\frac{U'(C)}{U''(C) \frac{\partial C}{\partial W}}. \quad (11.7)$$

Αντικαθιστώντας τη δεύτερη εξίσωση στην τρίτη λαμβάνουμε ότι:

$$w_i^* W = \sum_{j=1}^n \hat{v}_{ij}^{-1} (\alpha_j - r), \quad i = 1, \dots, n \quad (11.8)$$

όπου \hat{v}^{-1} είναι ο αντίστροφος του πίνακα:

$$[\hat{v}_{ij}] = [(\Sigma \hat{D} \Sigma)_{ij}] \quad (11.9)$$

$$\hat{D}_{ij} = \left(\rho_{ij} - \frac{V_W^2}{V_{WW}} \sum_{\kappa=1}^n \frac{R_{i\kappa} R_{j\kappa}}{\theta_\kappa} \right). \quad (11.10)$$

Επομένως, για να συγκρίνουμε το ποσό που επενδύεται στην περίπτωση της αποστροφής στην αβεβαιότητα σε σχέση με εκείνη της αποστροφής κινδύνου αφαιρούμε από την σχέση (3.3) την (11.8). Επομένως, λαμβάνουμε την μεταβολή στο επενδυόμενο ποσό για κάθε μία αξία, σαν:

$$W \Delta w_i = \sum_{j=1}^n [\Sigma^{-1} (\Pi^{-1} - \hat{D}^{-1}) \Sigma^{-1}]_{ij} (\alpha_j - r), \quad i = 1, \dots, n \quad (11.11)$$

Για να δούμε τη συνολική μεταβολή προσθέτουμε ως προς όλες τις αξίες και τελικά έχουμε:

$$W \Delta w = \sum_{i=1}^n \Delta w_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\Sigma^{-1} (\Pi^{-1} - \hat{D}^{-1}) \Sigma^{-1}]_{ij} (\alpha_j - r). \quad (11.12)$$

Απόδειξη της Πρότασης 4.2.2

Σε αυτή την περίπτωση η σχέση που περιγράφει το χαρτοφυλάκιο του επενδύτη είναι η παρακάτω:

$$\begin{aligned} dW &= \left[w_1(\alpha_1 - r + \sigma_1 h_1) + w_2(\alpha_2 - r + \sigma_2(\rho h_1 + h_2 \sqrt{1 - \rho^2})) \right] W dt \\ &+ (rW - C) dt + W \sigma_1 w_1 d\hat{B}_1 + W \sigma_2 \rho w_2 d\hat{B}_1 + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} w_2 d\hat{B}_2. \end{aligned} \quad (11.13)$$

Τότε, το αντίστοιχο πολλαπλασιαστικό πρόβλημα ευσταθούς ελέγχου είναι το:

$$J(\theta) = \sup_{w_i, C} \inf_h \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \int_0^\infty e^{-\delta t} [U(C) + \theta_1 \frac{h_1^2}{2} + \theta_2 \frac{h_2^2}{2}] dt \quad (11.14)$$

μ.π. (11.13).

Η συνάρτηση αξίας που αντιστοιχεί στο παραπάνω πρόβλημα ακολουθεί την:

$$\begin{aligned} \delta V &= \max_{w_i, C} \min_{h_i} \left\{ U(C) + \left(w_1(\alpha_1 - r + \sigma_1 h_1) W + (rW - c) \right. \right. \quad (11.15) \\ &+ \theta_1 \frac{h_1^2}{2} + \theta_2 \frac{h_2^2}{2} + w_2(\alpha_2 - r + \sigma_2 \rho h_1 + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} h_2) W \Big) V_W \\ &+ \frac{1}{2} V_{WW} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_i w_j \sigma_{ij} W^2 \Big\}. \end{aligned}$$

Για το παραπάνω στοχαστικό παίγνιο μεταξύ των δύο παικτών οι συνθήκες πρώτης τάξης δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$U'(C) = V_W \quad (11.16)$$

$$h_1 = -\frac{V_W W (\sigma_1 w_1^* + \sigma_2 \rho w_2^*)}{\theta_1} \quad (11.17)$$

$$h_2 = -\frac{V_W W \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_2 w_2^*}{\theta_2} \quad (11.18)$$

$$\sum_{j=1}^2 w_j^* W \sigma_{1j} = A(\alpha_1 - r) + A \sigma_1 h_1 \quad (11.19)$$

$$\sum_{j=1}^2 w_j^* W \sigma_{2j} = A(\alpha_2 - r) + A \sigma_2 (\rho h_1 + \sqrt{1 - \rho^2} h_2) \quad (11.20)$$

$$A = -\frac{V_W}{V_{WW}} = -\frac{U'(C)}{U''(C) \frac{\partial C}{\partial W}}. \quad (11.21)$$

Χρησιμοποιώντας συμβολισμό πινάκων όπως στην απόδειξη της περίπτωσης που αντιστοιχούσε σε ίδια επίπεδα αβεβαιότητας, είμαστε σε θέση να περιγράψουμε τη λύση του παραπάνω προβλήματος με τη βοήθεια της παρακάτω εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} w_1^* W & w_2^* W \end{bmatrix} \Lambda = \begin{bmatrix} A(\alpha_1 - r) & A(\alpha_2 - r) \end{bmatrix} \quad (11.22)$$

όπου Λ είναι ένας πίνακας:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \left(1 - \frac{V_W^2}{\theta_1 V_{WW}}\right) & \sigma_{12} \left(1 - \frac{V_W^2}{\theta_1 V_{WW}}\right) \\ \sigma_{21} \left(1 - \frac{V_W^2}{\theta_1 V_{WW}}\right) & \sigma_{22} \left(1 - \frac{V_W^2}{V_{WW}} \left(\frac{\rho^2}{\theta_1} + \frac{1 - \rho^2}{\theta_2}\right)\right) \end{bmatrix}. \quad (11.23)$$

Σε αυτή την περίπτωση η λύση δύναται να γραφεί στην παρακάτω μορφή:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} w_1^* W & w_2^* W \end{bmatrix} &= \frac{\begin{bmatrix} A(\alpha_1 - r) & A(\alpha_2 - r) \end{bmatrix}}{(1 - \rho^2) \left(1 - \frac{V_W^2}{\theta_1 V_{WW}}\right) \left(1 - \frac{V_W^2}{\theta_2 V_{WW}}\right)} \\ &\quad \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{V_W^2}{V_{WW}} \left(\frac{\rho^2}{\theta_1} + \frac{1 - \rho^2}{\theta_2}\right)\right) & \rho - \rho \frac{V_W^2}{\theta_1 V_{WW}} \\ \rho - \rho \frac{V_W^2}{\theta_1 V_{WW}} & 1 - \frac{V_W^2}{\theta_1 V_{WW}} \end{bmatrix} \Sigma^{-1}. \end{aligned} \quad (11.24)$$

Εξετάζουμε τις διαφορές στις ποσότητες οι οποίες δίνονται ανάμεσα στις σχέσεις (4.5), (4.6) και στην (11.24), μετά από κάποιους υπολογισμούς λαμβάνουμε ότι:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} W \Delta w_1 & W \Delta w_2 \end{bmatrix} &= \frac{A V_W^2 \begin{bmatrix} \alpha_1 - r & \alpha_2 - r \end{bmatrix}}{(1 - \rho^2) (\theta_2 V_{WW} - V_W^2)} \\ &\quad \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_2} \frac{1 - \rho^2}{1 - \frac{V_W^2}{V_{WW}}} - 1 & \rho \\ \rho & -1 \end{bmatrix} \Sigma^{-1}. \end{aligned} \quad (11.25)$$

Επομένως, η λύση γίνεται:

$$W\Delta w_1 = \frac{\kappa}{\sigma_1} \left[\frac{\alpha_1 - r}{\sigma_1} \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_2} \frac{1 - \rho^2}{1 - \frac{V_W^2}{V_{WW}}} - 1 \right) + \frac{\alpha_2 - r}{\sigma_2} \rho \right] \quad (11.26)$$

$$W\Delta w_2 = \frac{\kappa}{\sigma_2} \left[\frac{\alpha_1 - r}{\sigma_1} \rho - \frac{\alpha_2 - r}{\sigma_2} \right] \quad (11.27)$$

$$\kappa = \frac{AV_W^2}{(1 - \rho^2)(\theta_2 V_{WW} - V_W^2)}. \quad (11.28)$$

Άρα, αν το λ είναι αυτό το οποίο ορίστηκε στην σχέση (4.23), τότε:

$$W\Delta w_1 < 0 \quad \text{Αν} \quad \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_2} \mu > \frac{1 - \rho\lambda}{1 - \rho^2} \quad (11.29)$$

$$W\Delta w_2 < 0 \quad \text{Αν} \quad \rho > \lambda \quad (11.30)$$

όπου $\mu = \frac{1}{1 - \frac{V_W^2}{V_{WW}}}$. Αν, λοιπόν, η εξίσωση (11.30) λαμβάνει χώρα τότε το δεξί μέρος της σχέσης (11.29) είναι πάντοτε μεγαλύτερο του 1 και το αριστερό μικρότερο όταν ισχύει η σχέση $\frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_2} < 1$. Άρα, όπως και στην περίπτωση που εξετάσαμε με ίδια επίπεδα αβεβαιότητας μεταξύ των δύο αξιών, δεν αυξάνουμε ποτέ τα διαθέσιμα μας σε αυτές ταυτόχρονα όταν ισχύει η $\theta_1 < 2\theta_2$. Συνδυάζοντας, δε, τις εξισώσεις (11.26) – (4.21) λαμβάνουμε ότι:

$$\begin{aligned} W\Delta w &= W\Delta w_1 + W\Delta w_2 = & (11.31) \\ \kappa \frac{\alpha_1 - r}{\sigma_1} \frac{1}{\sigma_2} \left[\sigma \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_2} \mu (1 - \rho^2) - \sigma + \rho\lambda\sigma + \rho - \lambda \right] &< 0 \quad \text{Αν} \\ \rho\lambda\sigma + \rho - \lambda &> \sigma \left[1 - \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_2} \mu (1 - \rho^2) \right] \quad \text{ή} \\ \hat{\lambda} \left(\rho - \frac{1}{\sigma} \right) + \rho &> \sigma \left[1 - \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_2} \mu (1 - \rho^2) \right] \end{aligned} \quad (11.32)$$

όπου $\sigma = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ και $\hat{\lambda} = \frac{\alpha_2 - r}{\alpha_1 - r}$.

Απόδειξη της Πρότασης 5.1.2: Οι (5.1), (5.2), (5.19), οι οποίες περιγράφουν την κίνηση των P_1, α_1, σ_1 μπορούν να γράφουν ως:

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{P_1} &= \alpha_1 dt + \sigma_1 dB_1, & (11.33) \\ \frac{d\alpha_1}{\alpha_1} &= f_1 dt + g_1 (\rho_1 dB_1 + \sqrt{1 - \rho_1^2} dB_2), \\ \frac{d\sigma_1}{\sigma_1} &= f_2 dt + g_2 (\rho_2 dB_1 + \tau_1 dB_2 + \tau_2 dB_3), \\ \tau_1 &= \frac{\rho_3 - \rho_1 \rho_2}{\sqrt{1 - \rho_1^2}}, \\ \tau_2 &= \sqrt{1 - \rho_2^2 - \tau_1^2} \quad , \quad (1 - \rho_2^2 - \tau_1^2) > 0, \end{aligned}$$

όπου στο παραπάνω σύστημα των εξισώσεων B_1, B_2, B_3 είναι ανεξάρτητες *Brownian* κινήσεις και ρ_1, ρ_2, ρ_3 οι αντίστοιχοι συντελεστές συσχέτισης μεταξύ των ζευγών $(dB_1, dZ_1), (dB_1, dZ_2),$ και (dZ_1, dZ_2) ⁴⁶ Για το πρόβλημα (5.12) η λύση του *Merton* καθορίζει το βέλτιστο ευσταθές ποσοστό που επενδύεται στην αξία που ανησυχούμε για την ευστάθεια του μοντέλου περιγραφής της τιμής της:

$$\begin{aligned} w_1 W &= \frac{A(\alpha_1 - r)}{\sigma_1^2} + H_1 \frac{g_1 \rho \alpha_1}{\sigma_1} + H_2 \rho g_2, & (11.34) \\ A &= -\frac{V_W}{V_{WW}}, \\ H_1 &= -\frac{V_{\alpha_1 W}}{V_{WW}}, \\ H_2 &= -\frac{V_{\sigma_1 W}}{V_{WW}}. \end{aligned}$$

Αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα του καταναλωτή-επενδυτή ο οποίος δεν είναι σίγουρος για το μοντέλο αναφοράς του (11.33) και αναζητεί ευσταθείς κανόνες κατανομής χαρτοφυλακίου. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο διαταραχής των πιθανοτήτων που επάγονται από το μοντέλο αναφοράς, έπειτα από κάποιους υπολογισμούς το σύστημα που περιγράφει το διαταραγμένο μοντέλο γίνεται:

$$\begin{aligned} dS &= Adt + \Sigma d\hat{B} & (11.35) \\ S &= \begin{bmatrix} W(t) \\ \alpha_1(t) \\ \sigma_1(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} Ww_1(\alpha_1 + \sigma_1 h - r) + (rW - c) \\ \alpha_1[f_1 + g_1 h(\rho_1 + \sqrt{1 - \rho_1^2})] \\ \sigma_1[f_2 + g_2 h(\rho_2 + \tau_1 + \tau_2)] \end{bmatrix} \\ \Sigma &= \begin{bmatrix} W\sigma_1 w_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 g_1 \rho_1 & \alpha_1 g_1(\rho_1 + \sqrt{1 - \rho_1^2}) & 0 \\ \sigma_1 g_2 \rho_2 & \sigma_1 g_2 \tau_1 & \sigma_1 g_2 \tau_2 \end{bmatrix} \\ \hat{B} &= \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ \hat{B}_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

⁴⁶ Θεωρούμε το γεγονός ότι ο πίνακας των συντελεστών συσχέτισης είναι ο $RR^T = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_3 \\ \rho_2 & \rho_3 & 1 \end{bmatrix}$ με $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \rho_1 & \sqrt{1 - \rho_1^2} & 0 \\ \rho_2 & \tau_1 & \tau_2 \end{bmatrix}$. Λύνουμε το πρόβλημα μας για την περίπτωση όπου ο πίνακας R , είναι ένας πραγματικός πίνακας το οποίο λαμβάνει χώρα όταν $(1 - \rho_2^2 - \tau_1^2) > 0 \Leftrightarrow (1 - \rho_2^2)(1 - \rho_1^2) - (\rho_3 - \rho_1 \rho_2)^2 > 0$. Είμαστε σε θέση να πραγματοποιήσουμε την παραπάνω ανάλυση στην περίπτωση που όλες οι κύριες ορίζουσες του αρχικού πίνακα είναι θετικές. Η μέθοδος, δε, που χρησιμοποιούμε για να επιτύχουμε αυτό είναι η μέθοδος ορθοκανονικοποίησης των *Grant - Smith*.

Το ευσταθές πολλαπλασιαστικό πρόβλημα που ορίζεται σε αυτή την περίπτωση είναι:

$$J(\theta) = \sup_{w_1, C} \inf_h \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} [U(C) + \theta_3 \frac{h^2}{2}] dt \quad (11.36)$$

μ.π. (11.35),

όπου $\theta_3 = 3\theta$, και θ η παράμετρος ευστάθειας. Βάσει της *Bellman – Isaacs* συνθήκης η συνάρτηση αξίας $V(W, \alpha_1, \sigma_1, \theta)$ ικανοποιεί την:

$$\begin{aligned} \delta V = & \max_{w_1, C} \min_h \left\{ U(C) + \theta_3 \frac{h^2}{2} + V_W [w_1(\alpha_1 + \sigma_1 h - r)W + (rW - c)] \right. \\ & + V_{\alpha_1} \alpha_1 [f_1 + g_1 h(\rho_1 + \sqrt{1 - \rho_1^2})] + V_{\sigma_1} \sigma_1 [f_2 + g_2 h(\rho_2 + \tau_1 + \tau_2)] \\ & \left. + \frac{1}{2} \text{trace}(\Sigma^T \partial^2 V \Sigma) \right\}. \end{aligned}$$

και $\partial^2 V^{47}$ συμβολίζει τον πίνακα των δεύτερων μερικών παραγωγών σε σχέση με τα W, α_1, σ_1 . Οι συνθήκες πρώτης τάξης για το παραπάνω πρόβλημα είναι:

$$\begin{aligned} U'(C) &= V_W, \\ h &= -\frac{V_W W w_1 \sigma_1 + V_{\alpha_1} \alpha_1 g_1 (\rho_1 + \sqrt{1 - \rho_1^2}) + V_{\sigma_1} \sigma_1 g_2 (\rho_2 + \tau_1 + \tau_2)}{\theta_3}, \\ 0 &= V_W w_1 (\alpha_1 + \sigma_1 h - r) + V_{WW} \sigma_1^2 W w_1 + \alpha_1 g_1 \rho_1 \sigma_1 V_{\alpha_1 W} + V_{\sigma_1 W} g_2 \rho_2 \sigma_1^2 \end{aligned}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα των εξισώσεων λαμβάνουμε το κλάσμα του χαρτοφυλακίου w_1^* το οποίο επενδύεται στην αξία ως προς την οποία έχουμε αβεβαιότητα ως προς την εξέλιξη των τιμών της αναμενόμενης μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης.

$$\begin{aligned} w_1^* W \left(1 - \frac{V_W^2}{\theta_3 V_{WW}} \right) &= \frac{A(\alpha_1 - r)}{\sigma_1^2} + H_1 \frac{g_1 \rho_1 \alpha_1}{\sigma_1} + H_2 \rho g_2 \quad (11.37) \\ &+ \frac{V_W V_{\alpha_1}}{\theta_3 V_{WW}} \frac{g_1 \alpha_1 (\rho_1 + \sqrt{1 - \rho_1^2})}{\sigma_1} + \frac{V_W V_{\sigma_1}}{\theta_3 V_{WW}} g_2 (\rho_2 + \tau_1 + \tau_2) \end{aligned}$$

Οι πρώτοι τρεις όροι είναι ακριβώς οι ίδιοι με αυτούς της εξίσωσης (11.34), οπότε βάσει του συνηθισμένου επιχειρήματος πρέπει να διακρίνουμε τέσσερις περιπτώσεις ανάλογα με τα πρόσημο των μερικών παραγώγων της συνάρτησης τιμών σε σχέση με την αναμενόμενη τιμή και την τυπική απόκλιση. Ειδικότερα όταν $V_{\sigma_1} > (<)0$ και $V_{\alpha_1} > (<)0$ αν $\rho_1 + \sqrt{1 - \rho_1^2} > (<)0$ και $\rho_2 + \tau_1 + \tau_2 > (<)0$, τότε ένας επενδυτής που αποστρέφεται την αβεβαιότητα πάντα μειώνει τα διαθέσιμα στην αξία αυτή σε σχέση με τα αντίστοιχα που δίνει ο τύπος του

$${}^{47} \partial^2 V = \begin{bmatrix} V_{WW} & V_{W\alpha_1} & V_{W\sigma_1} \\ V_{W\alpha_1} & V_{\alpha_1\alpha_1} & V_{W\sigma_1} \\ V_{W\sigma_1} & V_{W\sigma_1} & V_{\sigma_1\sigma_1} \end{bmatrix}$$

Merton. Επομένως αν

$$S = \begin{cases} \rho_2 + \tau_1 + \tau_2 > (<)0 \text{ όταν } V_{\sigma_1} > (<)0 \text{ αντίστοιχα} \\ \rho_1 + \sqrt{1 - \rho_1^2} > (<)0 \text{ όταν } V_{\alpha_1} > (<)0 \text{ αντίστοιχα} \\ (1 - \rho_2^2)(1 - \rho_1^2) - (\rho_3 - \rho_1\rho_2)^2 > 0 \\ 1 \leq \rho_2 \leq 1 \\ -1 \leq \rho_3 \leq 1 \end{cases}$$

Η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί

Απόδειξη της Πρότασης 5.3.2: Θα παρουσιάσουμε την απόδειξη για την περίπτωση στοχαστικής τυπικής απόκλισης όταν $H_2 > 0, V_{\sigma_1} < 0$. Οι εξισώσεις (5.52) – (5.56) επίσης ισχύουν σε αυτή την περίπτωση με μόνη διαφορά ότι τα $H_2, \sigma_1, g_2, f_2, V_{\alpha_1}$ έχουν αντικαταστήσει τα $H_1, \alpha_1, g_1, f_1, V_{\sigma_1}$, αντίστοιχα. Ακολουθώντας την απόδειξη λαμβάνουμε ότι οι (5.60), (5.61), επίσης ισχύουν. Όμοια αν $(.)_2$ αναφέρεται στον αντίστοιχο όρο που σχετίζεται με τον πίνακα: $\begin{bmatrix} H_2\sigma_1g_2\rho_2\sigma_1 & H_2\sigma_1g_1\rho_3\sigma_2 \end{bmatrix}$ τότε:

$$(W\Delta w_1)_2 = \frac{\tilde{\kappa}}{\sigma_1} \left[\rho_2\xi + \rho_3(x - \rho_1) \right] \quad (11.38)$$

$$(W\Delta w_2)_2 = \frac{\tilde{\kappa}}{\sigma_2} \left[\rho_2(x - \rho_1) + \rho_3(1 - x) \right] \quad (11.39)$$

$$\tilde{\kappa} = \frac{H_2\sigma_1g_2}{(1 - \rho_1^2)} > 0.$$

Άρα

$$(W\Delta w_1)_2 < 0 \text{ Αν } \rho_2 < 0, \rho_1 > 0, \rho_3 > 0. \quad (11.40)$$

$$(W\Delta w_2)_2 < 0 \text{ Αν } 0 > \rho_2 > \rho_3, \rho_1 > 0 \text{ ή} \quad (11.41)$$

$$\rho_1 > 0, \rho_2 > 0, \rho_3 < 0. \quad (11.42)$$

Επίσης αν $(.)_3$ αναφέρεται στον αντίστοιχο όρο $-TM_2$ που σχετίζεται με τον πίνακα $\begin{bmatrix} M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$ τότε:

$$(W\Delta w_1)_3 = \frac{\tilde{\kappa}'}{\sigma_1} \left[(\rho_2 + \tau_2) \frac{(\rho_1^2 - x)x}{1 - x} - \rho_1(\rho_2 + \tau_2)x \right]$$

$$(W\Delta w_2)_3 = \frac{\tilde{\kappa}'}{\sigma_2} \left[-(\rho_2 + \tau_2)x + \rho_1(\rho_2 + \tau_2)x \right]$$

$$\tilde{\kappa}' = -\frac{A\frac{\sigma_1g_2V_{\alpha_1}}{\theta_3}}{(1 - \rho_1^2)} < 0.$$

Άρα

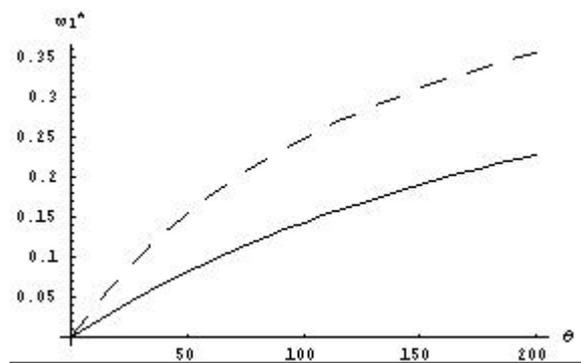
$$(W\Delta w_1)_3 < 0 \text{ Αν } \rho_1 < 0, (\rho_2 + \tau_2) < 0, \quad (11.43)$$

$$(W\Delta w_2)_3 < 0 \text{ Αν } \rho_1(\rho_2 + \tau_2) < (\rho_2 + \tau_2). \quad (11.44)$$

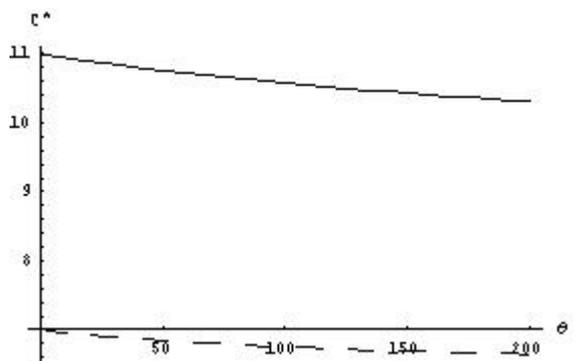
Επομένως έχουμε δείξει ότι:

1. Αν οι (5.61), (11.44) με την (11.41) ή την (11.42) ικανοποιούνται, τότε ορίζουν ένα χωριό του χώρου καταστάσεων, όπου υπάρχει μία αύξηση στα διαθέσιμα που επενδύονται στη δεύτερη αξία όπου η εξέλιξη της τιμής περιγράφεται από μία στοχαστική κίνηση και χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα σχετικά με την περίπτωση της αποστροφής στον κίνδυνο ή $\Delta w_2 = (W\Delta w_2)_1 + (W\Delta w_2)_2 + (W\Delta w_2)_3 < 0$.
2. Όταν η ανησυχία αναφορικά με την ευστάθεια του μοντέλου αναφοράς δεν υπάρχει ή $\theta \rightarrow \infty$, τότε η διαφορά μεταξύ της περίπτωσης της αποστροφής στην αβεβαιότητα και εκείνης στον κίνδυνο μηδενίζεται. $\Delta w = \Delta w_1 + \Delta w_2 \rightarrow 0$, $(\Delta w_1, \Delta w_2) \rightarrow 0$.

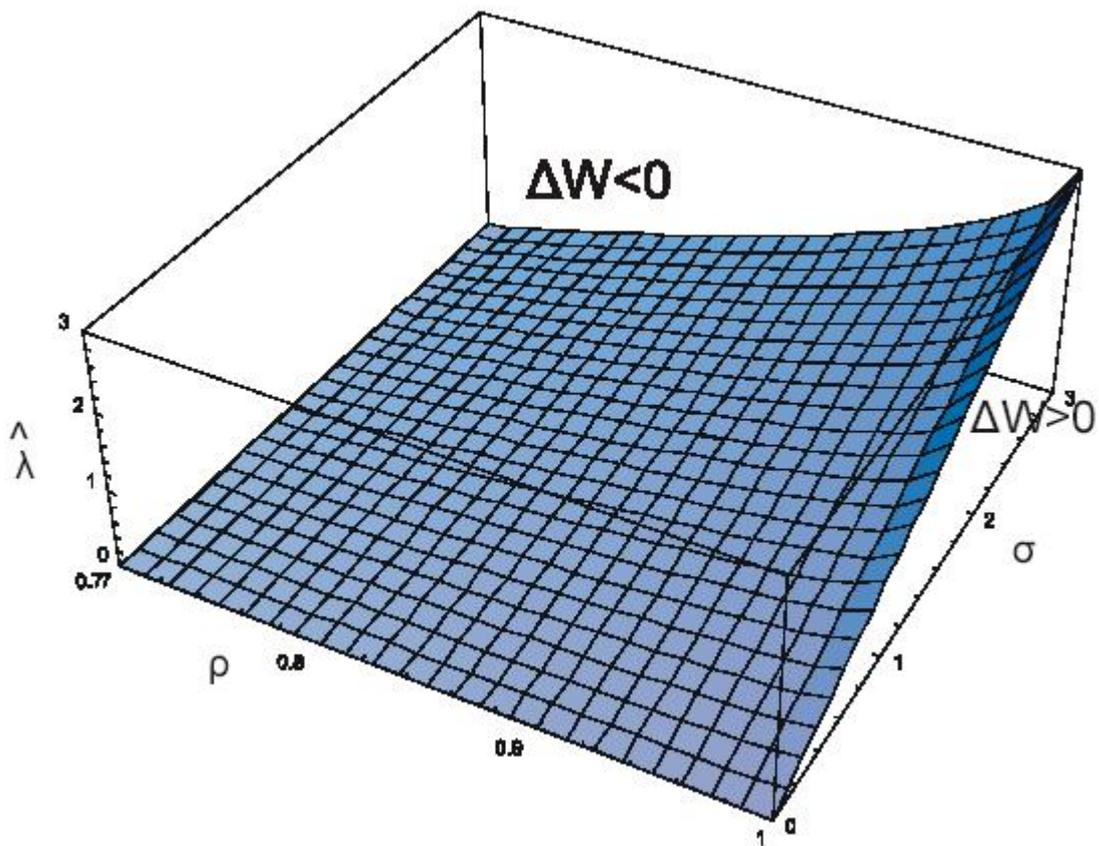
Η απόδειξη για τις άλλες δύο περιπτώσεις είτε $\begin{matrix} H_1 > 0, V_{\alpha_1} > 0 \\ H_1 < 0, V_{\alpha_1} < 0, \end{matrix}$ όταν αναφερόμαστε στην περίπτωση στοχαστικής αναμενόμενης τιμής ή $\begin{matrix} H_2 > 0, V_{\sigma_1} > 0 \\ H_2 < 0, V_{\sigma_1} < 0 \end{matrix}$, όταν αναφερόμαστε στην περίπτωση στοχαστικής τυπικής απόκλισης είναι παρόμοια.



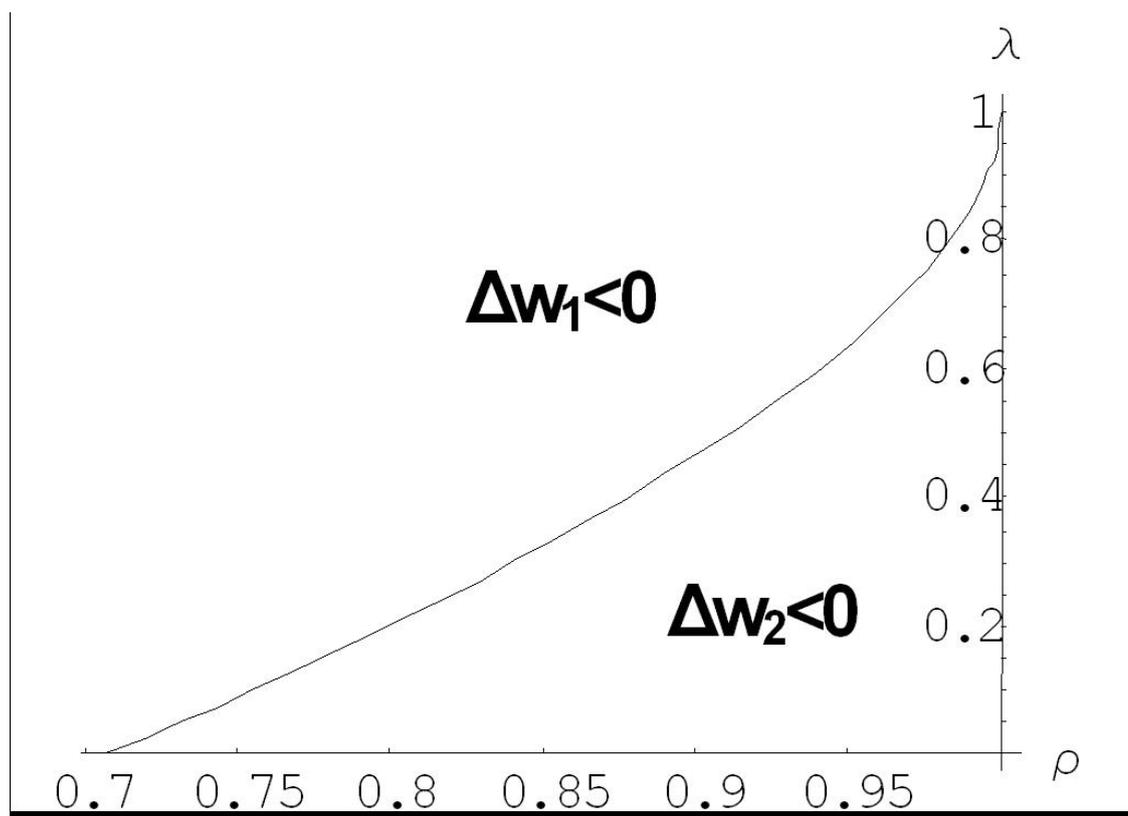
Σχήμα 1: Το βέλτιστο ευσταθές ποσοστό του χαρτοφυλακίου καθώς το θ κινείται από 0.1 ως 200, για $\gamma = 0.75$ και 0.5 (διακεκομμένη γραμμή)



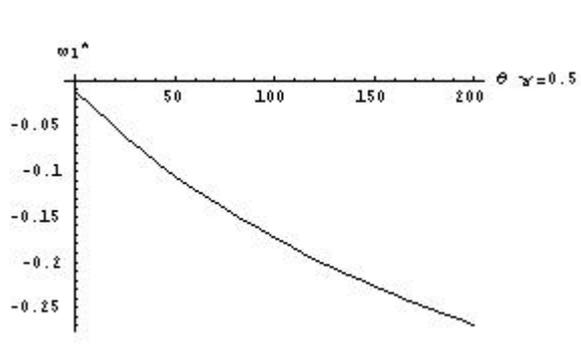
Σχήμα 2: Το βέλτιστο ευσταθές ποσό κατανάλωσης καθώς το θ κινείται από 0.1 ως 200, για $\gamma = 0.75$ και 0.5 (διακεκομμένη γραμμή)



Σχήμα 3: Μεταβολή του συνολικού επενδυόμενου ποσού στις αξίες όπου δε χαρακτηρίζονται από σταθερή απόδοση ανάμεσα στην περίπτωση της αποστρόφης στην αβεβαιότητα και εκείνης της αποστρόφης κινδύνου.



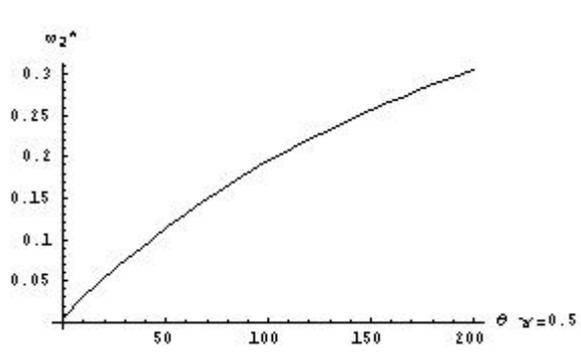
Σχήμα 4: Μεταβολή του συνολικού επενδυόμενου ποσού σε κάθε μία από τις αξίες όπου δεν χαρακτηρίζονται από σταθερή απόδοση ανάμεσα στην περίπτωση της αποστροφής στην αβεβαιότητα και εκείνης της αποστροφής κινδύνου.



Σχήμα 5: Συνολικά επενδύμενα διαθέσιμα στην πρώτη αξία που χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα:

$$\delta = 0.05 \quad \alpha_1 = 0.04 \quad \sigma_1 = 0.43 \quad r = 0.03 \quad \alpha_2 = 0.05 \quad \sigma_2 = 0.66 \quad \rho = 0.93$$

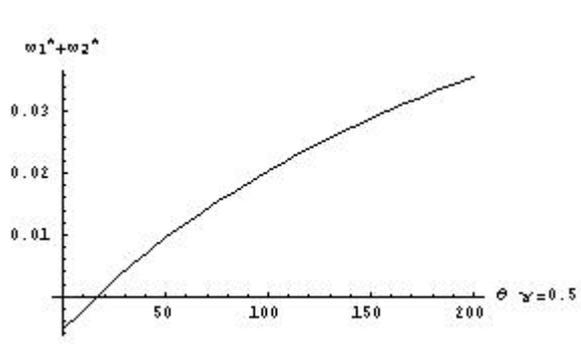
$$W = 100$$



Σχήμα 6: Συνολικά επενδύμενα διαθέσιμα στη δεύτερη αξία που χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα.

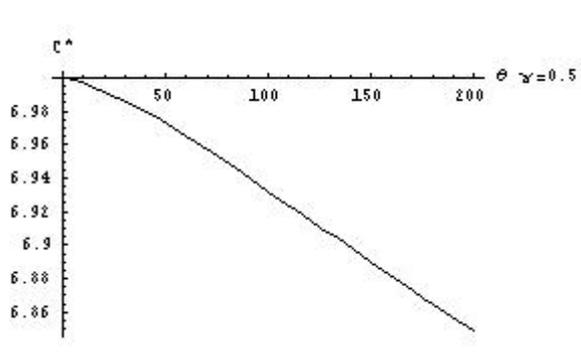
$$\delta = 0.05 \quad \alpha_1 = 0.04 \quad \sigma_1 = 0.43 \quad r = 0.03 \quad \alpha_2 = 0.05 \quad \sigma_2 = 0.66 \quad \rho = 0.93$$

$$W = 100$$



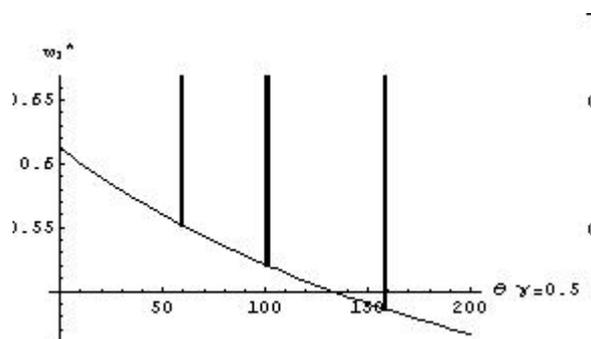
Σχήμα 7: Συνολικά επενδυόμενα διαθέσιμα στις δύο αξίες που χαρακτηρίζονται από αβεβαιότητα για:

$\delta = 0.05$ $\alpha_1 = 0.04$ $\sigma_1 = 0.43$ $r = 0.03$ $\alpha_2 = 0.05$ $\sigma_2 = 0.66$ $\rho = 0.93$
 $W = 100$

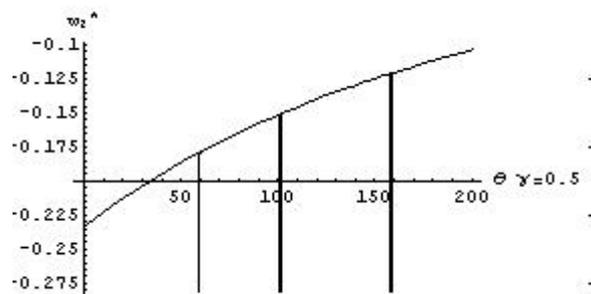


Σχήμα 8: Βέλτιστη κατανάλωση στην περίπτωση δύο αξιών που χαρακτηρίζονται από αβεβαιότητα για:

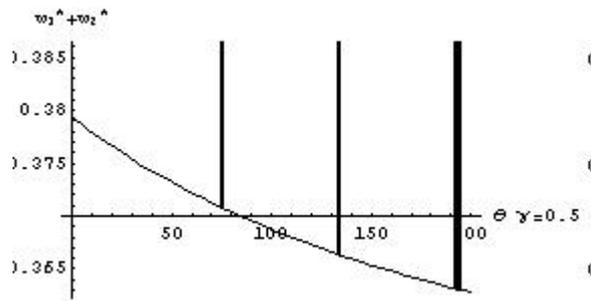
$\delta = 0.05$ $\alpha_1 = 0.04$ $\sigma_1 = 0.43$ $r = 0.03$ $\alpha_2 = 0.05$ $\sigma_2 = 0.66$ $\rho = 0.93$
 $W = 100$



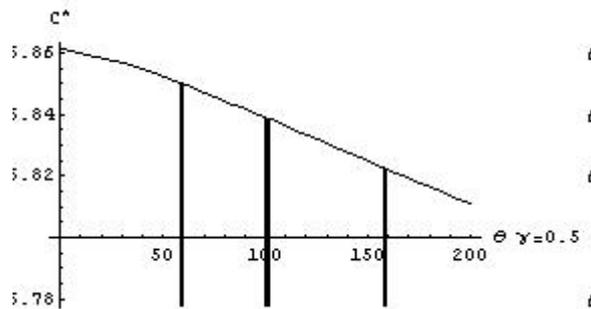
Σχήμα 9: Επενδύσιμα διαθέσιμα στην πρώτη από τις δύο αξίες που χαρακτηρίζονται από αβεβαιότητα για:
 $\delta = 0.05$ $\alpha_1 = 0.04$ $\sigma_1 = 0.43$ $r = 0.03$ $\alpha_2 = 0.05$ $\sigma_2 = 0.87$ $\rho = 0.93$
 $W = 100$



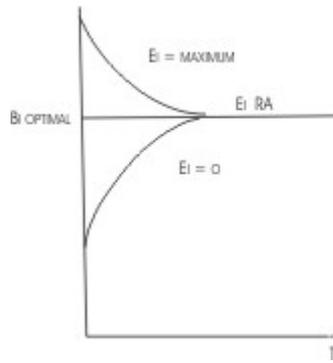
Σχήμα 10: Επενδύσιμα διαθέσιμα στη δεύτερη από τις δύο αξίες που χαρακτηρίζονται από αβεβαιότητα για:
 $\delta = 0.05$ $\alpha_1 = 0.04$ $\sigma_1 = 0.43$ $r = 0.03$ $\alpha_2 = 0.05$ $\sigma_2 = 0.87$ $\rho = 0.93$
 $W = 100$



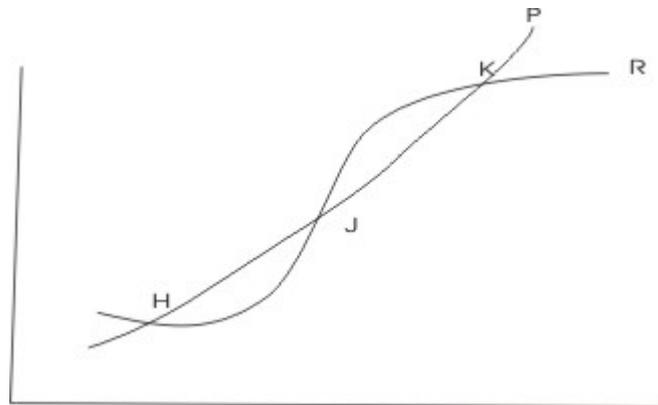
Σχήμα 11: Επενδύσιμα διαθέσιμα στις δύο αξίες που χαρακτηρίζονται από αβεβαιότητα για:
 $\delta = 0.05$ $\alpha_1 = 0.04$ $\sigma_1 = 0.43$ $r = 0.03$ $\alpha_2 = 0.05$ $\sigma_2 = 0.87$ $\rho = 0.93$
 $W = 100$



Σχήμα 12: Βέλτιστη κατανάλωση στην περίπτωση δύο αξιών που χαρακτηρίζονται από αβεβαιότητα για:
 $\delta = 0.05$ $\alpha_1 = 0.04$ $\sigma_1 = 0.43$ $r = 0.03$ $\alpha_2 = 0.05$ $\sigma_2 = 0.87$ $\rho = 0.93$
 $W = 100$



Σχήμα 13: Το πιο σύντομο μονοπάτι προσέγγισης.



Σχήμα 14: Ρύθμιση και λεκάνες έλξης.

Αναφορές

- [1] C.E. Agnew, Multiple Probability Assesments by dependnt experts *Journal of the American Statistical Association* 80, 343-347, 1985.
- [2] D. Amor, The e-business (R)evolution. Living and Working in an interconnected world. *Prentice Hall*, 2001.
- [3] E.W. Anderson, T. Sargent, L.P. Hansen A quartet of semigroups for model specification, robustness, prices of risk, and model detection, *Journal of the European Economic Assocation*(1) 68-123, 2003.
- [4] F.J. Anscombe, R.J Aumann, A definition of Subjective Probability *The Annals of Mathematics and Statistics* 34, 199-205, 1963.
- [5] K. Arrow, M. Cropper, G. Eads, R. Hahn, L. Lave, R. Noll, P. Portney, M. Russel, R. Schmalensee, V. Kerry Smith, and R. Stavins, Benefit-Cost Analysis in Environmental, Health and Safety, Regulation, *American Enterprise Institute. The Annapolis Centre, and Resources for the Future*, 1996.
- [6] J. Benyus, *Biomimicry: Inovation Inspired by Nature W. Morrow and Company, New York*, 1997.
- [7] T. Bewley, Knightian Decision Theory, Part 1, Mimeo *Yale University, New Haven, CT*, 1986.
- [8] W. Brainard, Uncertainty and the effectiveness of policy, *American Economic Review*, 58, 411-425, 1967.
- [9] W.A. Brock, S. Durlauf, Elements of a theory of design limits to optimal policy, *University of Wisconsin, SSRI Working Paper* 2003-25, 2003.
- [10] W.A. Brock, S. Durlauf, K. West, Policy evaluation in uncertain economic environments, *University of Wisconsin, SSRI Working Paper* 2003-15, 2003.
- [11] W. A. Brock, D. Starrett, Nonconvexities in Ecological Management Problem, *SSRI Working Paper* 2026, 1999.
- [12] W. A. Brock, A. Xepapadeas, Regulating nonlinear environmental systems under Knightian uncertainty, in: R. Arnott, B. Greenwald, R. Kanbur, B. Nalebuff (Eds.), *Economics for an Imperfect World: Essays In Honor of Joseph Stiglitz*, MIT Press, Cambridge, Mass., 2003.

- [13] W. A. Brock, A. Xepapadeas, Biodiversity Management Under Uncertainty, Economic Theory for the Environment: *Essays in Honour of K-G Maller E. Elgar*, 2002.
- [14] R. Casadesus-Masaneli, P. Klibanoff, E. Ozdenoren, Maxmin Expected Utility over Savage Acts with a set Of Priors *Journal of Economic Theory*, 35-65, 2000.
- [15] H. Chan, T. Dillan, R. Lee, E. Chang, Electronic Commerce Fundamental and Applications. *John Willey and Sons* 2001.
- [16] Z. Chen, L. Epstein, Ambiguity risk and asset returns in continuous time, *Econometrica*, 70, 1403-1443, 2002.
- [17] G. Choquet, Theory of Capacities *Annales de L' Institut Fourier* 5, 131-295, 1955.
- [18] J. Dow, S. Werlang, Uncertainty aversion, risk aversion, and the optimal choice of portfolio, *Econometrica* 60 197-204, 1992.
- [19] D. Duffie, L. Epstein, Stochastic Differential utility, *Econometrica*, 60, 353-394, 1992.
- [20] N. Dunford, J.T. Scharwrtz, Linear Operations, Part 1, *Interscience, New York* 1957.
- [21] P. Dupuis, R. Ellis, *A weak convergence approach to the theory of large deviations*, Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley and Sons, New York, 1997.
- [22] D. Elsbeg, Risk, Ambiguity and the Savage Axioms, *Quartely Journal of Economics*, 75, 643-669, 1961.
- [23] L. Epstein, J. Miao, A two-person dynamic equilibrium under ambiguity, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 27, 1253-1288, 2003.
- [24] L. Epstein, M. Schneider, Recursive Multiple Priors, *Journal of Economic Theory*, 113(1), 1-31, 2003.
- [25] L. Epstein, T. Wang, Intertemporal asset pricing under Knightian uncertainty, *Econometrica*, 63, 283-322, 1994.
- [26] L. Epstein, S. Zin, Substitution, Risk Aversion, and The temporal Behaviour of Consumption and Asset Returns *Econometrica*, 57, 937-969, 1989.
- [27] W.H. Fleming, P.E. Souganidis, On the existence of value function of two-player, zero sum stochastic differential games, *Indiana University. Mathematics Journal*, 3, 293-314, 1989.

- [28] K.R. French, J. M. Poterba, Investor diversification and international equity markets, *American Economic Review, Papers and Proceedings* 81(2), 222-226, 1991.
- [29] K. J. Gaston, Species richness, measure and measurement. In Biodiversity: a Biology of Numbers and Difference, *Blackwell Science Oxford*, 77-113, 1996.
- [30] C. Genest, M.J. Shervich , Modeling expert Judgements for Bayesian Updating *The Annals of Statistics* 13, 1198-1212, 1985.
- [31] I. Gilboa, D. Schmeidler, Maxmin expected utility with non-unique prior, *Journal Mathematical Economics*, 18, 141-153, 1989.
- [32] L. Hansen, T. Sargent, Discounted Linear Exponential Quadratic Gaussian Control *IEEE Transaction on Automatic Control*, 40, 968-971, 1995.
- [33] L. Hansen, T. Sargent, Robust control and filtering for macroeconomics, mimeo, *University of Chicago and Stanford University*, 2001.
- [34] L. Hansen, T. Sargent, Robust control and model uncertainty, *American Economic. Review*, 91, 60-66, 2001.
- [35] L. Hansen, T. Sargent, Wanting robustness in macroeconomics, unpublished paper, *University of Chicago and Stanford University*, 2001.
- [36] L. Hansen, T. Sargent, Robust control and economic model uncertainty, unpublished paper, *University of Chicago and Stanford University*, 2002.
- [37] L. Hansen, T. Sargent, *Misspecification in recursive macroeconomic theory*, monograph, University of Chicago and Stanford University, 2003.
- [38] L. Hansen, T. Sargent, T. Tallarini, Robust Permanent Income and Pricing, *Review of Economic Studies*, 66, 873-907, 1999.
- [39] L. Hansen, T. Sargent, G. Turmuhambetova, N. Williams, Robust control and model uncertainty, *mimeo*, University of Chicago and Stanford University, 2002.
- [40] S. A. Holling, Resilience and stability of ecological systems. *Annual Review of Ecology and Systematics*, 4, 1-23, 1973.
- [41] S. A. Holling, Adaptive enviromental assesment and management. *John Willey London UK*, 1978.

- [42] A. Holt, C. Tisdell, How useful are environmental safety standards in economics? -The example of safe minimum standard for protection of species, *Biodiversity and Conservation*, Vol. 2(2), 1993.
- [43] P.J. Huber, V. Strassen, Minimax tests and the Neyman-Pearson lemma for Capacities *The Annals of Statistics* 1, 251-263, 1973.
- [44] L. Hurwicz , Some Specification Problems and Applications to Econometric Models *Econometrica* 19, 343-344, 1951.
- [45] R. Kalakota, Whinston A., Frontiers of Electronic Commerce, *DIANE Publishing Company*, 1999.
- [46] F.H. Knight, Risk, Uncertainty and Profit *Boston, Houghton Mifflin*, 1921.
- [47] D.V. Lindley, A. Tversky and R.V. Brown , On the reconsiliation of probability assesments *Journal of The Royal Statistical Society, Series A* 142, 146-180, 1979.
- [48] W-F. Liu, Savings and portfolio decisions: Observable implications of Knightian uncertainty, *Working Paper, Department of Economics, University of Washington*, 2002.
- [49] W-F. Liu, Heterogeneous agents economies with Knightian uncertainty, *Working Paper, Department of Economics, University of Washington*, 2000.
- [50] J. Liu, J. Pan and T. Wang, An Equilibrium Model of Rare Event Premia, *Unpublished paper MIT*, 2002.
- [51] R.E. Lucas, Asset Prices in an Exchange Economy *Econometrica* 46, 1429-1445, 1978.
- [52] P. Maenhout, Robust portfolio rules, hedging and asset pricing, *mimeo, INSEAD*, 2001.
- [53] R. Merton, Optimum consumption and portfolio rules in a continuous time model, *Journal of Economic Theory*, 3, 373-413 1971.
- [54] R. Merton, An intertemporal capital asset pricing model, *Econometrica*, 41, 867-887, 1973.
- [55] Millennium Ecosystem Assessment, Ecosystems and Human Well-Being: *Synthesis, Island Press*, 2005.
- [56] B. Oksendall, Stochastic Differential Equations, *Springer Verlag* 2000.

- [57] A. Onatski, J. Stock, Robust monetary policy under model uncertainty in a small model of the U.S. economy, *Macroeconomic Dynamics*, 6, 85-110, 2002.
- [58] A. Onatski, N. Williams, Modeling Model Uncertainty, *Journal of the European Economic Association*, 1(5),1087-1022, 2003.
- [59] P. Pathak, Notes on robust portfolio choice, *mimeo*, Harvard University, 2002.
- [60] C. A. Perrings, K-G Maller, C. Folls, C.S. Holling, B.O. Janson (Eds), Biodiversity Conservation, *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht*, 1995.
- [61] H. M. Regan, Akcakaya, S. Ferson, K. Root, S Carroll, L. Ginzburg, Treatments of Uncertainty and Variability in Ecological Risk Assessment of Single-Species Populations, *Human and Ecological Risk Assessment*, 9 (4), 2003.
- [62] C. Roseta-Palma, A. Xepapadeas, Robust control in water management, *Journal of Risk and Uncertainty*, 29:1, 21-34, 2004.
- [63] L. Savage, The Foundations of Statistics *New York John Willey*, 1954.
- [64] D. Schmeidler, Subjective Probability without Additivity *Foerder Institute for Economic Research Tel-Aviv University*, 1982.
- [65] D. Schmeidler, Subjective Probability and Expected utility without Additivity *IMA series*, 1984.
- [66] D. Schmeidler, Integral Representation without Additivity *Proceedings of the American Mathematical Society* 97,2, 1986.
- [67] A. Serrat, A dynamic equilibrium model of international portfolio holdings, *Econometrica* 69(6), 1467-1490, 2001.
- [68] A. B. Smith, Statistical Decision Functions *Journal of The Royal Statistical Society, Series B*, 23, 1-25 , 1961.
- [69] U. Soderstrom, Monetary policy with uncertain parameters, *Scandinavian Journal of Economics*, 104, 125-145, 2002.
- [70] J. Soule, Conservation: tactics for constant crisis, *Science* 253, 744-750, 1991.
- [71] N. Strong, X. Xu, Understanding the equity home bias: Evidence from survey data, *Rev. Econ. Statist.* 85(2), 307 - 312, 2003.
- [72] P. Timmers, Electronic Commerce: Strategies and Models for Business to Business trading *John Willey and Sons* 2001.

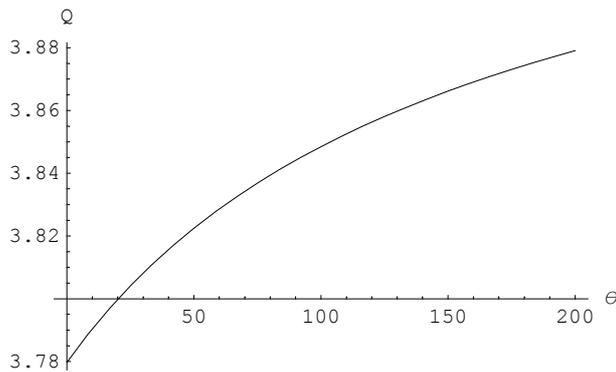
- [73] R. Uppal, T. Wang, Model misspecification and underdiversification, *Journal of Finance*, 58, 2465-2486, 2004.
- [74] J. Vandermeer, The ecology of Intercopping, *Cambridge University Press*, 1989.
- [75] S. Vardennan, G. Meeden, Callibration, Sufficiency and dominant consideration for Bayesian Probability assessors, *Journal of the American Statistical Association* 78, 808-816, 1983.
- [76] A. Wald, Statistical Desicion Functions, *Willey New York*, 1950.
- [77] T. Wang, Conditional Preferences and Updating, *Journal of Economic Theory*, 108, 286-321, 2003.
- [78] T. Wang, Two Classes of Multiple Prior Preferences, *Working paper, British Columbia*, 2001.

ΜΙΑ ΑΞΙΑ ΠΟΥ ΕΜΠΕΡΙΕΧΕΙ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ

a = 0.05
r = 0.03
 $\sigma = 0.5$
 $\delta = 0.05$
 $\gamma = 0.5$
W = 100

0.05
 0.03
 0.5
 0.05
 0.5
 100

```
Plot[Root[
(1 -  $\gamma$ ) * #^(-2) + W^ $\gamma$  * (a - r)^2 * #^3 * ( $\frac{\gamma}{\gamma - 1}$ )^2 *  $\frac{\theta^2}{(\theta - \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})^2} * \frac{-1}{2 * \theta * \sigma^2} -$ 
# * ( $\frac{\theta * (a - r)^2}{(\theta - \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma}) * \sigma^2}$ ) *  $\frac{\gamma}{\gamma - 1} +$ 
(a - r)^2 * # * ( $\frac{\theta^2}{(\theta - \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})^2 * \sigma^2 * 2}$ ) *  $\frac{\gamma}{\gamma - 1} - (\delta - \gamma * r) \&, 2],$ 
{ $\theta$ , 0.1, 200}, AxesLabel -> {" $\theta$ ", "Q"}]
```



- Graphics -

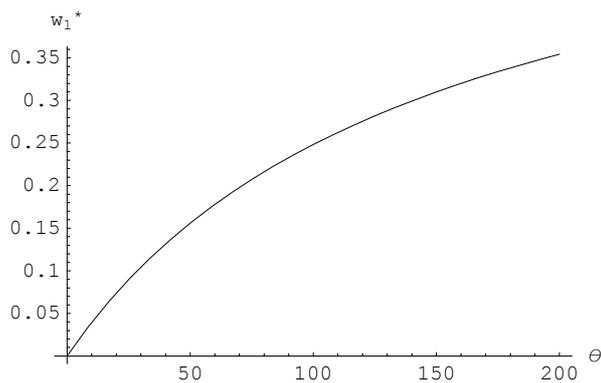
- Graphics -

ΠΑΡΕΧΕΙ ΤΟ Q

```

Plot[- 1/(γ-1) * (a-r)/σ^2 *
  (Root[(1-γ) * #^(-2) + W^γ * (a-r)^2 * #^3 * (γ/(γ-1))^2 *
    (θ - #^2 * (γ/(γ-1) * W^γ))^2 *
    -1/(2 * θ * σ^2) - # * (θ * (a-r)^2 / ((θ - #^2 * (γ/(γ-1) * W^γ) * σ^2)) * γ/(γ-1) +
    (a-r)^2 * # * (θ^2 / ((θ - #^2 * (γ/(γ-1) * W^γ))^2 * σ^2 * 2)) * γ/(γ-1) - (δ-γ*r) &, 2]) *
  θ / (θ - (Root[(1-γ) * #^(-2) + W^γ * (a-r)^2 * #^3 * (γ/(γ-1))^2 *
    (θ - #^2 * (γ/(γ-1) * W^γ))^2 *
    -1/(2 * θ * σ^2) - # * (θ * (a-r)^2 / ((θ - #^2 * (γ/(γ-1) * W^γ) * σ^2)) * γ/(γ-1) +
    (a-r)^2 * # * (θ^2 / ((θ - #^2 * (γ/(γ-1) * W^γ))^2 * σ^2 * 2)) * γ/(γ-1) - (δ-γ*r) &, 2])^2 *
    γ/(γ-1) * W^γ), {θ, 0.1, 200}, AxesLabel -> {"θ", "w1*"} ]

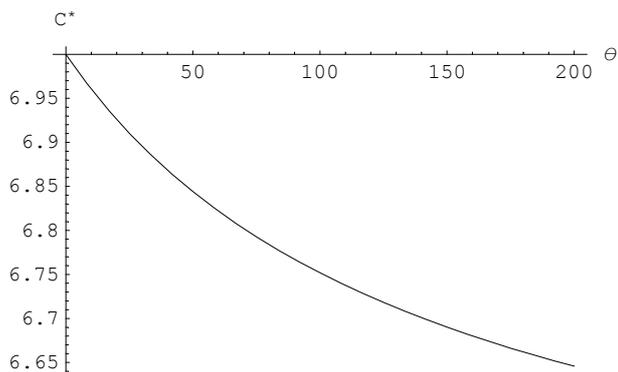
```



- Graphics -

**Ο ΠΑΡΑΠΑΝΟ ΚΩΔΙΚΑΣ ΔΙΝΕΙ ΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ
ΕΥΣΤΑΘΕΣ ΠΟΣΟΣΤΟ ΣΤΗΝ ΑΞΙΑ ΠΟΥ ΕΜΠΕΡΙΕΧΕΙ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ**

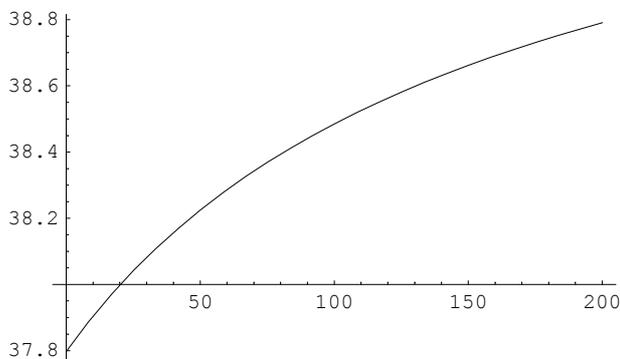
```
Plot[
W * (Root[(1 - \gamma) * #^(-2) + W^\gamma * (a - r)^2 * #^3 * (\frac{\gamma}{\gamma - 1})^2 * \frac{\theta^2}{(\theta - #^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)^2} *
\frac{-1}{2 * \theta * \sigma^2} - # * (\frac{\theta * (a - r)^2}{(\theta - #^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma) * \sigma^2}) * \frac{\gamma}{\gamma - 1} +
(a - r)^2 * # * (\frac{\theta^2}{(\theta - #^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)^2 * \sigma^2 * 2}) * \frac{\gamma}{\gamma - 1} - (\delta - \gamma * r) &, 2])^
(\frac{1}{\gamma - 1}), {θ, 0.1, 200}, AxesLabel -> {"θ", "C*"}]
```



- Graphics -

Ο ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΚΩΔΙΚΑΣ ΔΙΝΕΙ ΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΠΟΣΟ ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗΣ

```
Plot[
W^\gamma * (Root[(1 - \gamma) * #^(-2) + W^\gamma * (a - r)^2 * #^3 * (\frac{\gamma}{\gamma - 1})^2 * \frac{\theta^2}{(\theta - #^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)^2} *
\frac{-1}{2 * \theta * \sigma^2} - # * (\frac{\theta * (a - r)^2}{(\theta - #^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma) * \sigma^2}) * \frac{\gamma}{\gamma - 1} + (a - r)^2 * # *
(\frac{\theta^2}{(\theta - #^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)^2 * \sigma^2 * 2}) * \frac{\gamma}{\gamma - 1} - (\delta - \gamma * r) &, 2]), {θ, 0.1, 200}]
```



- Graphics -

- Graphics -

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΑΞΙΑΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

ΔΥΟ ΑΞΙΕΣ ΠΟΥ ΕΜΠΕΡΙΓΕΧΟΥΝ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΜΙΑ ΑΞΙΑ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΑΠΟΔΟΣΗΣ

$$a_1 = 0.04$$

$$a_2 = 0.05$$

$$\sigma_1 = 0.53$$

$$\sigma_2 = 0.97$$

$$\delta = 0.05$$

$$\gamma = 0.5$$

$$W = 100$$

$$p = 0.93$$

$$r = 0.02$$

$$a_1 = 0.04$$

$$a_2 = 0.05$$

$$\sigma_1 = 0.43$$

$$\sigma_2 = 0.87$$

$$\delta = 0.05$$

$$\gamma = 0.5$$

$$W = 100$$

$$p = 0.93$$

$$r = 0.03$$

Out[1]= 0.04

Out[2]= 0.05

Out[3]= 0.53

Out[4]= 0.97

Out[5]= 0.05

Out[6]= 0.5

Out[7]= 100

Out[8]= 0.93

Out[9]= 0.02

Out[10]= 0.04

Out[11]= 0.05

Out[12]= 0.43

Out[13]= 0.87

Out[14]= 0.05

Out[15]= 0.5

Out[16]= 100

Out[17]= 0.93

Out[18]= 0.03

0.04

0.05

0.53

0.97

0.05

0.5

100

0.93

0.02

0.04

0.05

0.43

0.87

0.05

0.5

100

0.93

0.03

Plot[Root[- δ ##*W $^\gamma$ +## $^{(-1)}$ *W $^\gamma$ + γ *W $^{(\gamma-1)}$ ##*

$$\left(r * W - W * \#^{(-2)} + W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \right. \right.$$

$$\left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1-p^2}) \right) \right) + \right.$$

$$\left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) \right]$$

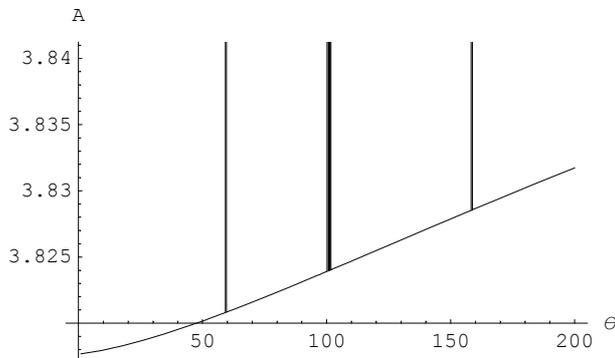
$$\left(a_1 - r + \sigma_1 * \left(-\frac{\gamma * W^\gamma * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \right. \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1-p^2}) \right) \right) + \right. \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \left. \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) + \sigma_2 * \right. \\
 & \left. \left(p + \sqrt{1 - p^2} \right) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right) + \\
 & \frac{\theta}{2} * \left(- \frac{\gamma * W^{\gamma} * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) + \\
 & \sigma_2 * \left(p + \sqrt{1 - p^2} \right) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right) \right) ^2 + \\
 & W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) \left(a_2 - r + \sigma_2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) * \right. \\
 & \left. \left(- \frac{\gamma * W^{\gamma} * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) \right) + \sigma_2 * \\
 & \left(p + \sqrt{1 - p^2} \right) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) + \\
 & \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1 * \sigma_2 * p * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\left. \left(\frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right) + \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1^2 * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right)^2 + \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_2^2 * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right)^2 \&$$

```
3], {θ, 1, 200}, AxesLabel -> {"θ", "A"}]
```



- Graphics -

- Graphics -

Ο ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΚΩΔΙΚΑΣ ΕΙΝΑΙ ΒΟΗΘΗΤΙΚΟΣ ΚΑΙ ΔΙΝΕΙ ΤΟ Α

Plot[

$$\left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{1}{1 - \gamma} * \left(W * \text{Root}[-\delta * \# * W^\gamma + \#^(-1) * W^\gamma + \gamma * W^\gamma * (\gamma - 1) * \# * \left(r * W - W * \#^(-2) + W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \left. \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma * \#^2} * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) \left(a_1 - r + \sigma_1 * \right. \\
 & \left. \left(-\frac{\gamma * W^{\gamma * \#}}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma * \#^2} * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma * \#^2} * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) + \sigma_2 * \\
 & (p + \sqrt{1 - p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma * \#^2} * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma * \#^2} \right) \right) \right) \right) \right) + \\
 & \frac{\theta}{2} * \left(-\frac{\gamma * W^{\gamma * \#}}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma * \#^2} * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma * \#^2} * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) + \\
 & \sigma_2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma * \#^2} * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma * \#^2} \right) \right) \right) \right) \right) ^2 + \\
 & W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma * \#^2} * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma * \#^2} \right) \right) \right) \right) \left(a_2 - r + \sigma_2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) * \right. \\
 & \left. \left(-\frac{\gamma * W^{\gamma * \#}}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma * \#^2} * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma * \#^2} * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) + \sigma_2 * \\
 & (p + \sqrt{1 - p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma * \#^2} * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \left. \left. \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right) \right) + \\
 & \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1 * \sigma_2 * p * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) * \\
 & \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) + \\
 & \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1^2 * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) ^2 + \\
 & \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_2^2 * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) ^2 \text{ \& } 3] * \\
 & \theta / \left(\theta - 2 * \text{Root}[-\delta * \# * W^{\gamma} + \#^{(-1)} * W^{\gamma} + \gamma * W^{(\gamma - 1)} * \# * \right. \\
 & \left. \left(r * W - W * \#^{(-2)} + W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) \left(a_1 - r + \right. \\
 & \sigma_1 * \left(-\frac{\gamma * W^{\gamma} * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) + \sigma_2 * \\
 & (p + \sqrt{1 - p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \\
& \quad \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \left) \right) \left) \right) + \frac{\theta}{2} * \\
& \left(-\frac{\gamma * W^{\gamma} * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) + \sigma_2 * \\
& \quad (p + \sqrt{1 - p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right) \wedge \\
& 2 + W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) \left(a_2 - r + \sigma_2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) * \right. \\
& \quad \left. \left(-\frac{\gamma * W^{\gamma} * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) + \sigma_2 * \\
& \quad (p + \sqrt{1 - p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) + \\
& \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1 * \sigma_2 * p * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) * \\
& \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right.
\end{aligned}$$

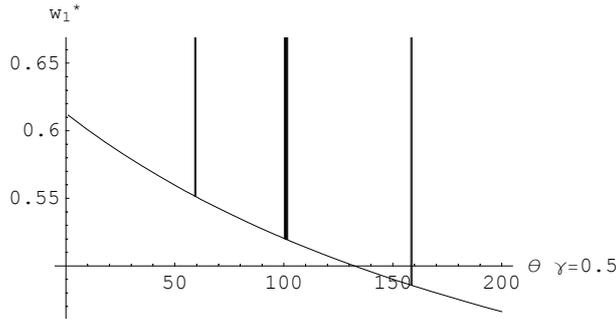
$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \\
 & \quad \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) + \\
 & \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1^2 * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \quad \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \\
 & \quad \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right)^2 + \\
 & \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_2^2 * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \quad \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \\
 & \quad \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right)^2 \& , 3]^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma} * \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \text{Root}[-\delta * \# * W^{\gamma} + \#^{(-1)} * W^{\gamma} + \gamma * W^{\gamma} * (\gamma - 1) * \right. \right. \\
 & \quad \# * \left(r * W - W * \#^{(-2)} + W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) \right) \\
 & \left(a_1 - r + \sigma_1 * \left(-\frac{\gamma * W^{\gamma} * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) + \sigma_2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) * \\
 & \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \quad \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \\
 & \quad \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right) + \frac{\theta}{2} * \\
 & \left(-\frac{\gamma * W^{\gamma} * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) + \sigma_2 * \right. \\
 & \left. \left(p + \sqrt{1 - p^2} \right) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \right. \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right) \right)^2 + \\
 & W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right) \left(a_2 - r + \sigma_2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) * \right. \\
 & \left. \left(-\frac{\gamma * W^\gamma * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) \right) + \\
 & \sigma_2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \right. \\
 & \left. \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) + \\
 & \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1 * \sigma_2 * p * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) * \\
 & \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right) \right) + \\
 & \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1^2 * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \\
 & \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) ^2 + \\
 & \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_2^2 * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \right. \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \right. \\
 & \left. \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) ^2 \&, 3] ^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \Bigg) + \\
 & \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \text{Root}[-\delta * \# * W^\gamma + \#^(-1) * W^\gamma + \right. \\
 & \left. \gamma * W^\gamma * (\gamma - 1) * \# * \left(r * W - W * \#^(-2) + \right. \right. \\
 & \left. \left. W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) \\
 & \left(a_1 - r + \sigma_1 * \left(-\frac{\gamma * W^\gamma * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \Bigg) + \sigma_2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) * \\
 & \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \right. \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right) \Bigg) \Bigg) + \frac{\theta}{2} * \\
 & \left(-\frac{\gamma * W^\gamma * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \right. \right. \right. \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \Bigg) + \sigma_2 * \\
 & (p + \sqrt{1 - p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge} 2 * (p + \sqrt{1 - p^{\wedge} 2}) \right) + \right. \\
 & \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^{\wedge} 2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge} 2 \right) \right) \left. \right)^{\wedge} 2 + \\
 & W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^{\wedge} 2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^{\wedge} 2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge} 2 * (p + \sqrt{1 - p^{\wedge} 2}) \right) + \right. \\
 & \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^{\wedge} 2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge} 2 \right) \right) \left(a_2 - r + \sigma_2 * (p + \sqrt{1 - p^{\wedge} 2}) * \right. \\
 & \left(-\frac{\gamma * W^{\gamma} * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^{\wedge} 2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^{\wedge} 2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \right. \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^{\wedge} 2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge} 2 * (1 + 2 * p * \sqrt{1 - p^{\wedge} 2}) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge} 2 * (p + \sqrt{1 - p^{\wedge} 2}) \right) \right) \right) + \\
 & \sigma_2 * (p + \sqrt{1 - p^{\wedge} 2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^{\wedge} 2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \right. \\
 & \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^{\wedge} 2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \right. \\
 & \left. \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge} 2 * (p + \sqrt{1 - p^{\wedge} 2}) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^{\wedge} 2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge} 2 \right) \right) \right) \left. \right) \left. \right) \left. \right) + \\
 & \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1 * \sigma_2 * p * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^{\wedge} 2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^{\wedge} 2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^{\wedge} 2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge} 2 * (1 + 2 * p * \sqrt{1 - p^{\wedge} 2}) \right) + \right. \\
 & \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge} 2 * (p + \sqrt{1 - p^{\wedge} 2}) \right) \right) \left. \right) * \\
 & \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^{\wedge} 2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^{\wedge} 2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge} 2 * (p + \sqrt{1 - p^{\wedge} 2}) \right) + \right. \\
 & \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^{\wedge} 2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge} 2 \right) \right) \left. \right) + \\
 & \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1^{\wedge} 2 * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^{\wedge} 2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^{\wedge} 2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^{\wedge} 2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge} 2 * (1 + 2 * p * \sqrt{1 - p^{\wedge} 2}) \right) + \right. \\
 & \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge} 2 * (p + \sqrt{1 - p^{\wedge} 2}) \right) \right) \left. \right) \left. \right)^{\wedge} 2 +
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_2^2 * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right)^2 * \left(p + \sqrt{1 - p^2} \right) \right) \right) \right), \{\theta, 1, 200\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{\text{"}\theta \gamma=0.5\text{"}, \text{"}w_1^*\text{"}\}$$



- Graphics -

- Graphics -

Ο ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΚΩΔΙΚΑΣ ΔΙΝΕΙ ΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΕΥΣΤΑΘΕΣ ΠΟΣΟΣΤΟ ΕΠΕΝΔΥΣΗΣ ΣΤΗΝ ΠΡΩΤΗ ΑΞΙΑ ΠΟΥ ΕΜΠΕΡΙΕΧΕΙ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ

Plot[

$$\left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{1}{1 - \gamma} \left(W * \text{Root}[-\delta * \# * W^\gamma + \#^(-1) * W^\gamma + \gamma * W^\gamma * (\gamma - 1) * \# * \left(r * W - W * \#^(-2) + W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2 * p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right] \left(a_1 - r + \sigma_1 * \left(-\frac{\gamma * W^\gamma * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2 * p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) \right] + \sigma_2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \left. \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right) \right) + \\
 & \frac{\theta}{2} * \left(-\frac{\gamma * W^{\gamma} * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) + \\
 & \sigma_2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right) ^2 + \\
 & W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) \left(a_2 - r + \sigma_2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) * \right. \\
 & \left. \left(-\frac{\gamma * W^{\gamma} * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) \right) + \sigma_2 * \\
 & (p + \sqrt{1 - p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right) \right) + \\
 & \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1 * \sigma_2 * p * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) * \\
 & \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right) + \right. \\ & \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1^2 * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \right. \\ & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \\ & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right)^2 + \\ & \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_2^2 * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \right. \\ & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \\ & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right)^2 \& , 3 \Big] * \\ & \theta / \left(\theta - 2 * \text{Root} \left[-\delta * \# * W^\gamma + \#^{\wedge}(-1) * W^\gamma + \gamma * W^{\wedge}(\gamma - 1) * \# * \right. \right. \\ & \left. \left. \left(r * W - W * \#^{\wedge}(-2) + W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) \left(a_1 - r + \right. \\ & \left. \sigma_1 * \left(-\frac{\gamma * W^\gamma * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) + \sigma_2 * \\ & \left(p + \sqrt{1 - p^2} \right) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \right. \\ & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \\ & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right) \right) + \frac{\theta}{2} * \\ & \left(-\frac{\gamma * W^\gamma * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) + \sigma_2 * \\ & \left(p + \sqrt{1 - p^2} \right) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \right. \end{aligned}$$

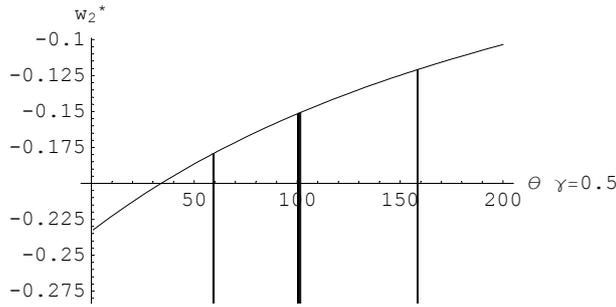
$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma * \#^2} * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \\
 & \quad \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma * \#^2} \right) \right) \Bigg) \wedge \\
 & 2 + W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma * \#^2} * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \\
 & \quad \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma * \#^2} \right) \right) \Bigg) \left(a_2 - r + \sigma_2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) * \right. \\
 & \left. \left(-\frac{\gamma * W^{\gamma * \#}}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma * \#^2} * (1 + 2 * p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma * \#^2} * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) + \sigma_2 * \\
 & (p + \sqrt{1 - p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma * \#^2} * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma * \#^2} \right) \right) \right) \right) \Bigg) \Bigg) + \\
 & \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1 * \sigma_2 * p * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma * \#^2} * (1 + 2 * p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma * \#^2} * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) * \\
 & \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma * \#^2} * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma * \#^2} \right) \right) \right) \right) + \\
 & \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1^2 * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma * \#^2} * (1 + 2 * p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma * \#^2} * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) \Bigg) \wedge 2 + \\
 & \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_2^2 * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \\
 & \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right)^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma} * \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \text{Root}[-\delta * \# * W^{\gamma} + \#^(-1) * W^{\gamma} + \gamma * W^{\gamma} * (\gamma - 1) * \right. \right. \\
 & \# * \left(r * W - W * \#^(-2) + W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \\
 & \left(a_1 - r + \sigma_1 * \left(-\frac{\gamma * W^{\gamma} * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * \right. \right. \\
 & \left. \left. W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) + \sigma_2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) * \\
 & \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) \right) + \frac{\theta}{2} * \\
 & \left(-\frac{\gamma * W^{\gamma} * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \right. \right. \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) + \sigma_2 * \\
 & (p + \sqrt{1 - p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) \right)^2 + \\
 & W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \left. \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} \right) \right) \right) \left(a_2 - r + \sigma_2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) * \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. \left. - \frac{\gamma * W^{\gamma} * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^{\wedge 2} * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) \right) + \right. \\
 & \left. \sigma_2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^{\wedge 2} * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. \left. \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} \right) \right) \right) \right) \right) \right) + \\
 & \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1 * \sigma_2 * p * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^{\wedge 2} * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) * \\
 & \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^{\wedge 2} * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} \right) \right) \right) + \\
 & \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1^2 * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^{\wedge 2} * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right)^2 + \\
 & \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_2^2 * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^{\wedge 2} * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} \right) \right) \right) \right)^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) + \\
 & \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \text{Root}[-\delta * \# * W^{\gamma} + \#^{\wedge (-1)} * W^{\gamma} + \gamma * W^{\wedge (\gamma - 1)} * \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \# * \left(r * W - W * \#^{(-2)} + W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \right. \right. \\
 & \quad \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \\
 & \quad \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) \right) \\
 & \left(a_1 - r + \sigma_1 * \left(-\frac{\gamma * W^\gamma * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) \right) \right) + \sigma_2 * (p + \sqrt{1-p^2}) * \\
 & \quad \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \right. \\
 & \quad \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \\
 & \quad \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right) \right) + \frac{\theta}{2} * \\
 & \left(-\frac{\gamma * W^\gamma * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \right. \right. \right. \\
 & \quad \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \\
 & \quad \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) \right) \right) + \sigma_2 * \\
 & \quad (p + \sqrt{1-p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \right. \\
 & \quad \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \\
 & \quad \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right)^2 + \\
 & W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \right. \\
 & \quad \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \\
 & \quad \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right) \left(a_2 - r + \sigma_2 * (p + \sqrt{1-p^2}) * \right. \\
 & \quad \left(-\frac{\gamma * W^\gamma * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \left. \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (p + \sqrt{1 - p^{\wedge 2}}) \right) \right) \right) \right) + \right. \\
& \sigma_2 * (p + \sqrt{1 - p^{\wedge 2}}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^{\wedge 2})} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \right. \\
& \left. \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^{\wedge 2} * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \right. \right. \\
& \left. \left. \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (p + \sqrt{1 - p^{\wedge 2}}) \right) \right) + \right. \\
& \left. \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^{\wedge 2}} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} \right) \right) \right) \right) \right) + \\
& \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1 * \sigma_2 * p * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^{\wedge 2})} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^{\wedge 2} * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
& \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^{\wedge 2}} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^{\wedge 2}}) \right) \right) + \\
& \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (p + \sqrt{1 - p^{\wedge 2}}) \right) \right) \right) * \\
& \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^{\wedge 2})} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^{\wedge 2} * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
& \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (p + \sqrt{1 - p^{\wedge 2}}) \right) \right) + \\
& \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^{\wedge 2}} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} \right) \right) \right) + \\
& \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1^{\wedge 2} * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^{\wedge 2})} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^{\wedge 2} * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
& \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^{\wedge 2}} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^{\wedge 2}}) \right) \right) + \\
& \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (p + \sqrt{1 - p^{\wedge 2}}) \right) \right) \right) \right) \wedge 2 + \\
& \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_2^{\wedge 2} * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^{\wedge 2})} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^{\wedge 2} * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
& \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (p + \sqrt{1 - p^{\wedge 2}}) \right) \right) + \\
& \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^{\wedge 2}} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} \right) \right) \right) \right) \wedge 2 \ \& \ 3] \wedge 2 \right) \right) \right) , \\
& \{\theta, 1, 200\}, \text{ AxesLabel} \rightarrow \{\theta \ \gamma=0.5, "w_2 * "\}
\end{aligned}$$



- Graphics -

- Graphics -

Ο ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΚΩΔΙΚΑΣ ΔΙΝΕΙ ΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΕΥΣΤΑΘΕΣ

ΠΟΣΟΣΤΟ ΕΠΕΝΔΥΣΗΣ ΣΤΗΝ ΔΕΥΤΕΡΗ ΑΞΙΑ ΠΟΥ ΕΜΠΕΡΙΕΧΕΙ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ

Plot[

$$\left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1-p^2)} * \frac{1}{1-\gamma} \left(W * \text{Root}[-\delta * \# * W^\gamma + \#^{(-1)} * W^\gamma + \gamma * W^{(\gamma-1)} * \# * \left(r * W - W * \#^{(-2)} + W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1-p^2}) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) \right) \left(a_1 - r + \sigma_1 * \left(-\frac{\gamma * W^\gamma * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1-p^2}) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) \right) + \sigma_2 * (p + \sqrt{1-p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right) + \frac{\theta}{2} * \left(-\frac{\gamma * W^\gamma * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1-p^2}) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) \right) + \sigma_2 * \right) \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
 & \left((p + \sqrt{1-p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \right. \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right)^2 + \\
 & W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \right. \right. \\
 & \left. \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) + \\
 & \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right) \left(a_2 - r + \sigma_2 * (p + \sqrt{1-p^2}) * \right. \\
 & \left. \left(-\frac{\gamma * W^\gamma * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1-p^2}) \right) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) \right) \right) \right) + \sigma_2 * \\
 & (p + \sqrt{1-p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right) \right) + \\
 & \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1 * \sigma_2 * p * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1-p^2}) \right) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) \right) * \\
 & \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right) \right) + \\
 & \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1^2 * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1-p^2}) \right) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) \right) \right) \right)^2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_2^2 * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right)^2 * \left. \right) * \\
 & \theta / \left(\theta - 2 * \text{Root}[-\delta * \# * W^\gamma + \#^{(-1)} * W^\gamma + \gamma * W^{(\gamma - 1)} * \# * \right. \\
 & \left. \left(r * W - W * \#^{(-2)} + W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) \right) \right) \\
 & \left(a_1 - r + \sigma_1 * \left(-\frac{\gamma * W^\gamma * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1-p^2}) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) \right) \right) + \sigma_2 * (p + \sqrt{1-p^2}) * \\
 & \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \right. \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right) + \frac{\theta}{2} * \\
 & \left(-\frac{\gamma * W^\gamma * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) \right) \right) + \sigma_2 * \\
 & (p + \sqrt{1-p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \right. \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right) ^ \\
 & 2 + W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \\
 & \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \\
 & \left(a_2 - r + \sigma_2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) * \left(-\frac{\gamma * W^{\gamma} * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) + \sigma_2 * (p + \\
 & \sqrt{1 - p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right) + \\
 & \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1 * \sigma_2 * p * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) * \\
 & \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \right. \right. \\
 & \left. \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) + \\
 & \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1^2 * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) ^2 + \\
 & \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_2^2 * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) ^2 \& , 3] ^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma} * \#^2 *
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \text{Root}[-\delta * \# * W^\gamma + \#^(-1) * W^\gamma + \gamma * W^\gamma * (\gamma - 1) * \right. \right. \\
& \# * \left(r * W - W * \#^(-2) + W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \right. \right. \\
& \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) \\
& \left(a_1 - r + \sigma_1 * \left(-\frac{\gamma * W^\gamma * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) \right) + \\
& \sigma_2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \right. \\
& \left. \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \right. \right. \\
& \left. \left. \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \right. \right. \\
& \left. \left. \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right) + \frac{\theta}{2} * \left(-\frac{\gamma * W^\gamma * \#}{\theta} * \right. \\
& \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \right. \right. \\
& \left. \left. \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) + \sigma_2 * (p + \\
& \sqrt{1 - p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \right. \\
& \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \\
& \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right)^2 + \\
& W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \right. \\
& \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \\
& \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(a_2 - r + \sigma_2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) * \left(-\frac{\gamma * W^{\gamma} * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) + \\
 & \sigma_2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \right. \\
 & \quad \left. \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \\
 & \quad \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right) + \gamma * (\gamma - 1) * \\
 & \sigma_1 * \sigma_2 * p * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \quad \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \\
 & \quad \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) * \\
 & \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \quad \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \\
 & \quad \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) + \\
 & \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1^2 * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \quad \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \\
 & \quad \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) ^2 + \\
 & \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_2^2 * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \quad \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \\
 & \quad \left. \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) ^2 * \left(1 + 2p * \sqrt{1 - p^2} \right) \right) + \\
 & \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \text{Root}[-\delta * \# * W^{\gamma} + \#^{\gamma} * (-1) * W^{\gamma} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \gamma * W^{\gamma-1} * \# * \left(r * W - W * \#^{-2} + \right. \\
 & W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) \right) \\
 & \left(a_1 - r + \sigma_1 * \left(-\frac{\gamma * W^{\gamma} * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^{\gamma})} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) \right) \right) + \\
 & \sigma_2 * (p + \sqrt{1-p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \right. \\
 & \left. \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^{\gamma})} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) \right) + \frac{\theta}{2} * \left(-\frac{\gamma * W^{\gamma} * \#}{\theta} * \right. \\
 & \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^{\gamma})} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1-p^2}) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) \right) + \sigma_2 * (p + \\
 & \sqrt{1-p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right)^2 + \\
 & W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(a_2 - r + \sigma_2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) * \left(-\frac{\gamma * W^{\gamma} * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) + \\
 & \sigma_2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \right. \\
 & \quad \left. \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \\
 & \quad \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right) + \gamma * (\gamma - 1) * \\
 & \sigma_1 * \sigma_2 * p * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \quad \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \\
 & \quad \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) * \\
 & \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \quad \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \\
 & \quad \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) + \\
 & \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1^2 * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \quad \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \\
 & \quad \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) ^2 + \\
 & \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_2^2 * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \quad \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \\
 & \quad \left. \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) ^2 * \left(p + \sqrt{1 - p^2} \right) \right) \right) + \\
 & \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{1}{1 - \gamma} * \left(W * \text{Root}[-\delta * \# * W^{\gamma} + \#^{\gamma} * (-1) * W^{\gamma} + \gamma * W^{\gamma} * (\gamma - 1) * \right. \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \# * \left(r * W - W * \#^{(-2)} + \right. \\
& W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \right. \\
& \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) \right) \left(a_1 - r + \right. \\
& \sigma_1 * \left(-\frac{\gamma * W^\gamma * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) \right) \right) + \sigma_2 * \\
& \left(p + \sqrt{1-p^2} \right) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \right. \\
& \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right) + \\
& \frac{\theta}{2} * \left(-\frac{\gamma * W^\gamma * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) \right) \right) + \sigma_2 * \\
& \left(p + \sqrt{1-p^2} \right) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \right. \\
& \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right) ^2 + \\
& W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \right. \right. \\
& \left. \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \\
& \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right) \left(a_2 - r + \sigma_2 * (p + \sqrt{1-p^2}) * \right. \\
& \left. \left(-\frac{\gamma * W^\gamma * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \right. \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \left. \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) + \sigma_2 * \right. \\
 & \left. \left(p + \sqrt{1 - p^2} \right) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right) + \\
 & \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1 * \sigma_2 * p * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \\
 & \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) * \\
 & \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \\
 & \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right) + \\
 & \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1^2 * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \\
 & \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) ^2 + \\
 & \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_2^2 * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \\
 & \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right) ^2 \&, 3 \Big) * \\
 & \theta / \left(\theta - 2 * \text{Root}[-\delta * \# * W^\gamma + \#^(-1) * W^\gamma + \gamma * W^\gamma * (\gamma - 1) * \# * \right. \\
 & \left. \left(r * W - W * \#^(-2) + W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^\gamma)} * \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) \\
 & \left(a_1 - r + \sigma_1 * \left(-\frac{\gamma * W^\gamma * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \right. \right. \right. \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\theta}{\left(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma\right)} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1-p^2}) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) + \sigma_2 * (p + \sqrt{1-p^2}) * \\
 & \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{\left(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma\right)} * \right. \\
 & \quad \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \\
 & \quad \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2\right) \right) \right) + \frac{\theta}{2} * \\
 & \left(-\frac{\gamma * W^\gamma * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{\left(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma\right)} * \right. \right. \right. \\
 & \quad \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \\
 & \quad \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) \right) + \sigma_2 * \\
 & \quad (p + \sqrt{1-p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{\left(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma\right)} * \right. \\
 & \quad \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \\
 & \quad \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2\right) \right) \right) \right) ^ \\
 & 2 + W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{\left(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma\right)} * \right. \\
 & \quad \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \\
 & \quad \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2\right) \right) \right) \\
 & \left(a_2 - r + \sigma_2 * (p + \sqrt{1-p^2}) * \left(-\frac{\gamma * W^\gamma * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \right. \right. \right. \\
 & \quad \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{\left(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma\right)} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1-p^2}) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) \right) + \sigma_2 * (p + \\
 & \quad \sqrt{1-p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{\left(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma\right)} * \right. \\
 & \quad \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} \right) \right) \right) \right) \right) \right) + \\
 & \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1 * \sigma_2 * p * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^{\wedge 2})} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^{\wedge 2} * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (1 + 2 * p * \sqrt{1 - p^{\wedge 2}}) \right) \right) + \\
 & \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (p + \sqrt{1 - p^{\wedge 2}}) \right) \right) \right) * \\
 & \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^{\wedge 2})} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^{\wedge 2} * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (p + \sqrt{1 - p^{\wedge 2}}) \right) \right) + \right. \\
 & \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} \right) \right) \right) + \\
 & \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1^{\wedge 2} * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^{\wedge 2})} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^{\wedge 2} * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (1 + 2 * p * \sqrt{1 - p^{\wedge 2}}) \right) \right) + \\
 & \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (p + \sqrt{1 - p^{\wedge 2}}) \right) \right) \right) \wedge 2 + \\
 & \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_2^{\wedge 2} * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^{\wedge 2})} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^{\wedge 2} * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (p + \sqrt{1 - p^{\wedge 2}}) \right) \right) + \\
 & \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} \right) \right) \right) \wedge 2 \ \&, \ 3] \wedge 2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma} \right) * \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \text{Root}[-\delta * \# * W^{\gamma} + \#^{\wedge (-1)} * W^{\gamma} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \gamma * W^{\gamma} * (\gamma - 1) * \# * \left(r * W - W * \#^{\wedge (-2)} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^{\wedge 2})} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^{\wedge 2} * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (1 + 2 * p * \sqrt{1 - p^{\wedge 2}}) \right) \right) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (p + \sqrt{1 - p^{\wedge 2}}) \right) \right) \right) \right) \\
 & \left(a_1 - r + \sigma_1 * \left(-\frac{\gamma * W^{\gamma} * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^{\wedge 2})} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^{\wedge 2} * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (1 + 2 * p * \sqrt{1 - p^{\wedge 2}}) \right) \right) \right) + \right.
 \end{aligned}$$

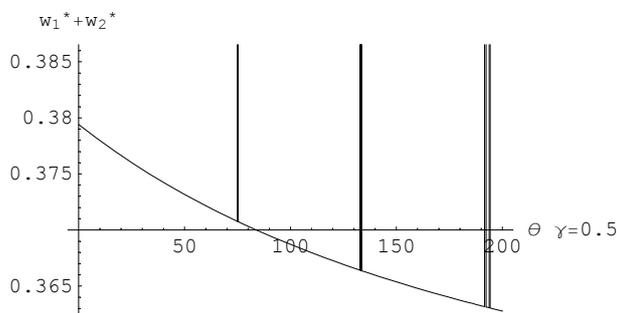
$$\begin{aligned}
& \left. \left. \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) + \right. \\
& \sigma_2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \right. \\
& \left. \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \right. \right. \\
& \left. \left. \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \right. \right. \\
& \left. \left. \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right) + \frac{\theta}{2} * \left(-\frac{\gamma * W^{\gamma} * \#}{\theta} * \right. \\
& \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \right. \right. \\
& \left. \left. \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) + \sigma_2 * (p + \\
& \sqrt{1 - p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
& \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right) \right)^2 + \\
& W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
& \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) \right) \\
& \left(a_2 - r + \sigma_2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) * \left(-\frac{\gamma * W^{\gamma} * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) \right) + \\
& \sigma_2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \right. \\
& \left. \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \right. \right. \\
& \left. \left. \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \left. \left. \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) + \gamma * (\gamma - 1) * \\
 & \sigma_1 * \sigma_2 * p * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^{\wedge 2})} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^{\wedge 2} * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^{\wedge 2}}) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (p + \sqrt{1 - p^{\wedge 2}}) \right) \right) \right) * \\
 & \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^{\wedge 2})} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^{\wedge 2} * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (p + \sqrt{1 - p^{\wedge 2}}) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} \right) \right) \right) + \\
 & \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1^{\wedge 2} * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^{\wedge 2})} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^{\wedge 2} * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^{\wedge 2}}) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (p + \sqrt{1 - p^{\wedge 2}}) \right) \right) \right) \right)^{\wedge 2} + \\
 & \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_2^{\wedge 2} * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^{\wedge 2})} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^{\wedge 2} * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (p + \sqrt{1 - p^{\wedge 2}}) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} \right) \right) \right) \right)^{\wedge 2} \& , 3]^{\wedge 2} * (p + \sqrt{1 - p^{\wedge 2}}) \right) + \\
 & \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \text{Root}[-\delta * \# * W^{\gamma} + \#^{\wedge (-1)} * W^{\gamma} + \right. \\
 & \left. \gamma * W^{\wedge (\gamma - 1)} * \# * \left(r * W - W * \#^{\wedge (-2)} + \right. \right. \\
 & \left. \left. W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^{\wedge 2})} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^{\wedge 2} * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^{\wedge 2}}) \right) + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (p + \sqrt{1 - p^{\wedge 2}}) \right) \right) \right) \right) \right) \\
 & \left(a_1 - r + \sigma_1 * \left(-\frac{\gamma * W^{\gamma} * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^{\wedge 2})} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^{\wedge 2} * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\wedge 2} * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^{\wedge 2}}) \right) + \right. \right. \right. \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) + \right. \\
 & \sigma_2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \right. \\
 & \left. \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) \right) + \frac{\theta}{2} * \left(-\frac{\gamma * W^{\gamma} * \#}{\theta} * \right. \\
 & \left. \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) + \\
 & \sigma_2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \right. \\
 & \left. \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right) ^2 + \\
 & W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \\
 & \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) \\
 & \left(a_2 - r + \sigma_2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) * \left(-\frac{\gamma * W^{\gamma} * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) \right) \right) \right) \right) \right) + \\
 & \sigma_2 * (p + \sqrt{1 - p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1 - p^2)} * \frac{W * \#}{1 - \gamma} * \right. \\
 & \left. \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma - 1} * W^{\gamma})} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 \sigma_2} * \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\gamma} * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\gamma} \right) \right) \right) \right) + \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1 * \sigma_2 * p * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^{\gamma})} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\gamma} * (1 + 2 * p * \sqrt{1-p^2}) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\gamma} * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) \right) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^{\gamma})} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\gamma} * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\gamma} \right) \right) \right) + \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1^2 * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^{\gamma})} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\gamma} * (1 + 2 * p * \sqrt{1-p^2}) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\gamma} * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) \right) ^2 + \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_2^2 * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^{\gamma})} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\gamma} * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^{\gamma} \right) \right) \right) ^2 \&, 3] ^2 \right) \right),$$

{ θ , 0.1, 200}, AxesLabel -> {" θ $\gamma=0.5$ ", " w_1^* + w_2^* "}



- Graphics -

Ο ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΚΩΔΙΚΑΣ ΔΙΝΕΙ ΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΕΥΣΤΑΘΕΣ ΣΥΝΟΛΙΚΟ
ΠΟΣΟΣΤΟ ΕΠΕΝΔΥΣΗΣ ΣΤΙΣ ΔΥΟ ΑΞΙΕΣ ΠΟΥ ΕΜΠΕΡΙΕΧΟΥΝ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ

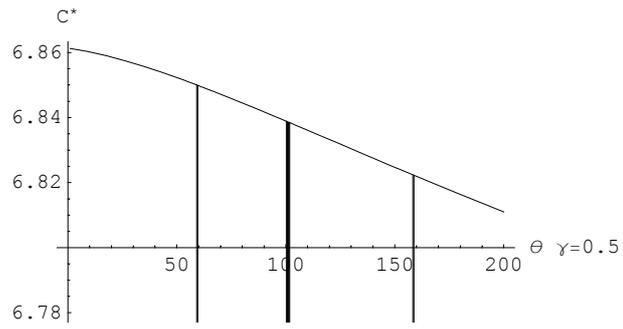
- Graphics -

$$\begin{aligned}
 & \text{Plot}\left[W * \left(\text{Root}\left[-\delta * W^\gamma + \#^{(-1)} * W^\gamma + \gamma * W^{(\gamma-1)} * \# * \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(r * W - W * \#^{(-2)} + W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1-p^2}) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) \right) \left(a_1 - r + \right. \\
 & \left. \sigma_1 * \left(-\frac{\gamma * W^\gamma * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) \right) \right) + \\
 & \left. \sigma_2 * (p + \sqrt{1-p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \right. \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right) + \\
 & \frac{\theta}{2} * \left(-\frac{\gamma * W^\gamma * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) \right) \right) + \\
 & \left. \sigma_2 * (p + \sqrt{1-p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \right. \right. \\
 & \left. \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right) \right) \right) ^2 + \\
 & W * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^\gamma)} * \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \right. \right. \\
 & \left. \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) + \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \right. \\
 & \left. \left. \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^\gamma * \#^2 \right) \right) \right) \left(a_2 - r + \sigma_2 * (p + \sqrt{1-p^2}) * \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(-\frac{\gamma * W^{\gamma} * \#}{\theta} * \left(\sigma_1 * \frac{1}{W} * \left(\frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^{\gamma})} * \right. \right. \right. \\
 & \quad \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \\
 & \quad \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) \right) + \\
 & \quad \sigma_2 * (p + \sqrt{1-p^2}) * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \quad \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \\
 & \quad \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) \right) + \\
 & \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1 * \sigma_2 * p * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \quad \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \\
 & \quad \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) \right) * \\
 & \quad \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \quad \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \\
 & \quad \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) + \\
 & \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_1^2 * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \quad \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (1 + 2p * \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \\
 & \quad \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) \right) \right) ^2 + \\
 & \frac{1}{2} * \gamma * (\gamma - 1) * \sigma_2^2 * \left(\frac{1}{W} * \frac{1}{(1-p^2)} * \frac{W * \#}{1-\gamma} * \frac{\theta}{(\theta - 2 * \#^2 * \frac{\gamma}{\gamma-1} * W^{\gamma})} * \right. \\
 & \quad \left(\frac{(a_1 - r)}{\sigma_1 * \sigma_2} * \left(-p + \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 * (p + \sqrt{1-p^2}) \right) + \right. \\
 & \quad \left. \left. \frac{(a_2 - r)}{\sigma_2^2} * \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1) * \theta} * W^{\gamma} * \#^2 \right) \right) \right) ^2 \&,
 \end{aligned}$$

3]] ^(-2), {θ, 1, 200}, AxesLabel -> {"θ

γ=
0.5", "C*"]]



- Graphics -

- Graphics -

Ο ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΚΩΔΙΚΑΣ ΔΙΝΕΙ ΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΕΥΣΤΑΘΕΣ ΠΟΣΟ ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗΣ