

**ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΜΕ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ
ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΕΣ ΚΑΙ ΕΡΓΟΔΙΚΑ Ή
ΥΦΑΙΡΕΤΙΚΑ ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ:
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΑ**

ΚΑΜΑΡΙΑΝΑΚΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2007**

Στην Έλενα και την Εριέτα

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
2	Στοχαστικός έλεγχος με κόστη προσαρμογής: Εισαγωγικά αποτελέσματα.	11
	2.1 Το πρόβλημα και η διατύπωσή του μέσω αλυσίδων Markov.....	11
	2.2 Η συνάρτηση αξίας.....	14
	2.3 Συνθήκες βέλτιστου ελέγχου.....	19
3	Ένα μοντέλο μη αναστρέψιμων επενδύσεων με στοχαστικές δυνατότητες παραγωγής και πάγια και αναλογικά κόστη διεκπεραίωσης.	23
	3.1 Περιγραφή του προβλήματος και σχετιζόμενη βιβλιογραφία.....	23
	3.2 Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος.....	24
	3.3 Βοηθητικά αποτελέσματα.....	25
	3.4 Λύση της qv-ανισότητας.....	27
	3.5 Εφαρμογή.....	34
4	Στοχαστικός έλεγχος με διακριτές προσαρμογές και υφαιρετικά ή εργοδικά κριτήρια βελτιστοποίησης: Μία συγκριτική εφαρμογή στον έλεγχο χαρτοφυλακίου.	39
	4.1 Περιγραφή του προβλήματος και σχετιζόμενη βιβλιογραφία.....	39
	4.2 Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος.....	41
	4.3 Λύση του εργοδικού προβλήματος.....	43
	4.4 Λύση του υφαιρετικού προβλήματος.....	47
	4.5 Εφαρμογή.....	53
5	Βέλτιστη εφαρμογή χαρτοφυλακίου σταθερών αναλογιών με εργοδικά κριτήρια βελτιστοποίησης.	63
	5.1 Περιγραφή του προβλήματος και σχετιζόμενη βιβλιογραφία.....	63
	5.2 Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος.....	66
	5.3 Λύση του εργοδικού προβλήματος.....	72
	5.4 Λύση του υφαιρετικού προβλήματος.....	75
	5.5 Η πυκνότητα πιθανότητας της στοχαστικής διαδικασίας αναλογιών χαρτοφυλακίου.....	80
	5.6 Εφαρμογή.....	82
6	Συμπεράσματα	91
7	Παράρτημα	95

Η παρούσα διδακτορική διατριβή κατατέθηκε στο τμήμα Οικονομικών Επιστημών την 01-10-2007. Η υποστήριξή της πραγματοποιήθηκε στο Ρέθυμνο την 13-06-2007 στα πλαίσια του διδακτορικού προγράμματος σπουδών του τμήματος Οικονομικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Κρήτης.

Υπεύθυνος της διδακτορικής διατριβής ήταν ο καθηγητής Αναστάσιος Ξεπαπαδέας. Στην τριμελή επιτροπή της εργασίας συμμετείχαν επίσης οι Γ. Κοσιώρης και Α. Κανάς. Την επταμελή επιτροπή συμπλήρωσαν οι Ν. Φράγκος, Κ. Ζοπουνίδης, Α. Γιαννακόπουλος και Μ. Λουλάκης.

Κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διατριβής εργάστηκα στο Ινστιτούτο Υπολογιστικών Μαθηματικών του Ιδρύματος Τεχνολογίας και Έρευνας ως υπεύθυνος ανάπτυξης στατιστικών μοντέλων για μεγάλο πλήθος εφαρμογών. Οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ σε όλους τους συνεργάτες του Τομέα Περιφερειακής Ανάλυσης και ειδικά στον επιστημονικό υπεύθυνο του τομέα, ερευνητή Π. Πραστάκο για τη συνεργασία που είχαμε.

Οφείλω να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Α. Ξεπαπαδέα για την καθοδήγηση που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διατριβής.

Τέλος, ευχαριστώ την οικογένειά μου και όλους όσους με βοήθησαν να φτάσω ως εδώ. Η εργασία είναι αφιερωμένη στη σύζυγό μου Έλενα χωρίς τη στήριξη της οποίας το πιο πιθανό είναι ότι δεν θα την ξεκινούσα και στην κόρη μας Εριέτα, που γεννήθηκε πρόσφατα.

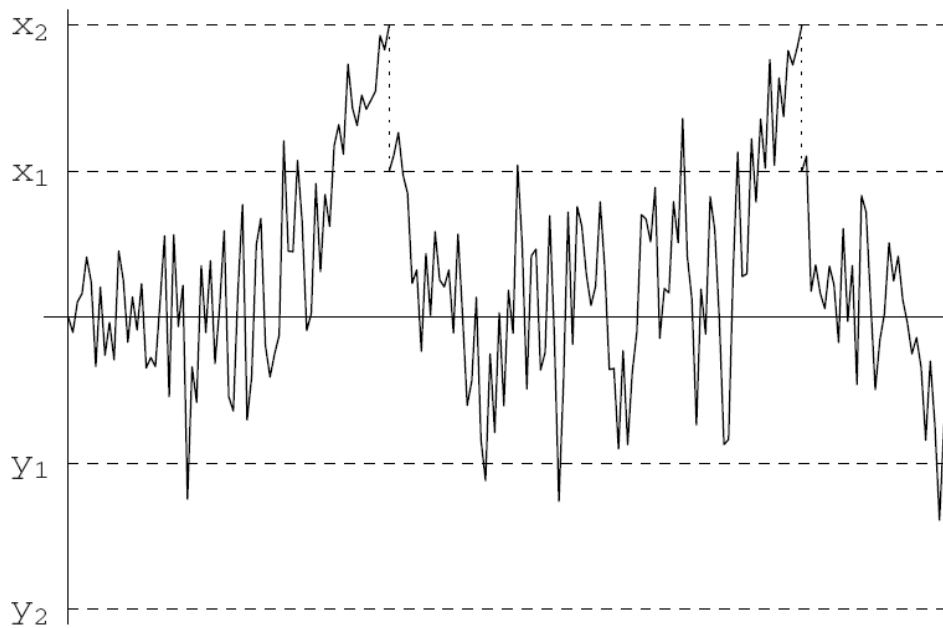
Περίληψη

Η παρούσα εργασία εξετάζει προβλήματα στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές (stochastic impulse control problems). Τέτοιες μορφές ελέγχου είναι βέλτιστες όταν οι προσαρμογές μίας συνεχούς στοχαστικής διαδικασίας ενέχουν πάγια και αναλογικά κόστη. Το πλήθος των εφαρμογών τους είναι μεγάλο: χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι ο έλεγχος μίας συναλλαγματικής ισοτιμίας από μία κεντρική τράπεζα, ο καθορισμός των βέλτιστων χρόνων και μεγεθών για τη συγκομιδή ενός μέρους από έναν πληθυσμό, ο έλεγχος χαρτοφυλακίου κ.α. Η σχετική βιβλιογραφία έχει εστιάσει την έρευνα σε προβλήματα στα οποία μεγιστοποιείται ή ελαχιστοποιείται ένα υφαιρετικό κριτήριο σε έναν άπειρο χρονικό ορίζοντα. Πρόσφατες έρευνες έδειξαν ότι για κάποια προβλήματα στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές (π.χ. για τον έλεγχο μίας συναλλαγματικής ισοτιμίας) είναι προτιμότερη η υιοθέτηση εργοδικών κριτηρίων κατά τα οποία μεγιστοποιείται μία συνάρτηση κερδών ανά μονάδα χρόνου ή αντίστοιχα ελαχιστοποιείται μία συνάρτηση απώλειας ανά μονάδα χρόνου. Προβλήματα με εργοδικά κριτήρια πρακτικά δεν έχουν εξετασθεί στη βιβλιογραφία και δεν υπάρχει μία γενική μεθοδολογία επίλυσής τους.

Η κύρια συνεισφορά της εργασίας είναι ότι παρουσιάζει μία μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές και εργοδικά κριτήρια βελτιστοποίησης. Η μεθοδολογία συνδυάζει βασικά αποτελέσματα στοχαστικού λογισμού με αλγορίθμους επίλυσης προβλημάτων μη γραμμικής βελτιστοποίησης. Οι βέλτιστες στρατηγικές που προκύπτουν συγκρίνονται με αυτές που προκύπτουν με την υιοθέτηση υφαιρετικών κριτηρίων. Ως μέσα για τη διεξαγωγή της σύγκρισης χρησιμοποιούμε δύο προβλήματα διαχείρισης χαρτοφυλακίου το ένα από τα οποία παρουσιάζεται για πρώτη φορά. Στην εργασία εξετάζεται επίσης ένα επενδυτικό πρόβλημα στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές και υφαιρετικά κριτήρια η επίλυση του οποίου με βάση την κλασσική μέθοδο επίλυσης ενός συστήματος qv-ανισοτήτων παρουσιάζει ιδιαιτερότητες.

1 Εισαγωγή

Η παρούσα εργασία εξετάζει προβλήματα στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές (stochastic impulse control problems). Στα συγκεκριμένα προβλήματα η υπό έλεγχο στοχαστική διαδικασία είναι ένα μοντέλο συνεχούς χρόνου (στοχαστική διαδικασία Ito) στο οποίο η αβεβαιότητα εκφράζεται μέσω (τουλάχιστον) μίας κίνησης Brown. Ο έλεγχος πραγματοποιείται μέσω διακριτών προσαρμογών στη στοχαστική διαδικασία όπως φαίνεται στο γράφημα 1.1: Η στοχαστική διαδικασία μεταβάλλεται ελεύθερα σε ένα βέλτιστα καθορισμένο διάστημα (y_2, x_2) . Στην περίπτωση που η διαδικασία βρεθεί στο άνω (κάτω) όριο του διαστήματος την αναπροσαρμόζουμε στο επίσης βέλτιστα καθορισμένο σημείο x_1 (y_1) εντός του διαστήματος. Κάθε τέτοια προσαρμογή της στοχαστικής διαδικασίας συνεπάγεται πάγια κόστη καθώς και κόστη ανάλογα του μεγέθους της προσαρμογής



Γράφημα 1.1. Χαρακτηριστικό παράδειγμα στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές για μία διαδικασία Ito.

Η μαθηματική διερεύνηση τέτοιων προβλημάτων ξεκίνησε στις αρχές της δεκαετίας του ογδόντα με το βιβλίο των Bensoussan και Lions [9]. Η έρευνα εντατικοποιήθηκε στα μέσα της δεκαετίας του ενενήντα κυρίως μέσω των εργασιών των Korn [51, 52, 53] , Cadenillas κ.α. [19, 20, 21, 22]

Oksendal και Sulem [72] και Pliska κ.α. [10, 11]. Το πλήθος των εφαρμογών τους σε οικονομικά και χρηματοοικονομικά προβλήματα είναι μεγάλο – παρακάτω αναφέρουμε μία σειρά εφαρμογών / παραδειγμάτων. Ένα από τα πρώτα άρθρα που διατύπωνε ένα τέτοιο οικονομικό πρόβλημα δημοσιεύτηκε από τον Scarf [80].

Παράδειγμα 1.1 Έλεγχος ρευστών κεφαλαίων

Το πρόβλημα αφορά τον έλεγχο ρευστών κεφαλαίων τα οποία έχουν τυχαίες διακυμάνσεις που σχετίζονται με την ύπαρξη πολλών εισοδηματικών πηγών και λειτουργικών εξόδων. Οι μεταβολές στα ρευστά κεφάλαια συνεπάγονται κόστη δύο ειδών: όταν τα ρευστά κεφάλαια είναι θετικά υπάρχει το κόστος μη βέλτιστης επένδυσης και όταν είναι αρνητικά υπάρχουν αντίστοιχα κυρώσεις. Ο σκοπός είναι τα ρευστά κεφάλαια να διατηρούνται σε σχετικά χαμηλά επίπεδα χωρίς πολλές επεμβάσεις οι οποίες συνεπάγονται (πάγια και αναλογικά) κόστη. Το πρόβλημα, όπως διατυπώθηκε από τον Baccarin [4], είναι η εύρεση στρατηγικών που ελαχιστοποιούν το καθαρό κόστος σε έναν άπειρο χρονικό ορίζοντα. Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος βελτιστοποίησης είναι παρόμοια με την (1.6) που σχετίζεται με το πρόβλημα ελέγχου μίας συναλλαγματικής ισοτιμίας. Το στοχαστικό μοντέλο που χαρακτηρίζει την εξέλιξη των ρευστών κεφαλαίων στο χρόνο δίνεται από τη σχέση:

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t. \quad (1.1)$$

Παρόμοια προβλήματα εξετάστηκαν από τους Sulem [81] και Harrison κ.α. [40].

Παράδειγμα 1.2 Πρόβλημα αναπροσαρμογής τιμών

Θεωρούμε μία εταιρεία η οποία παράγει ένα αγαθό του οποίου η σχετική τιμή εξελίσσεται με βάση την εξίσωση (1.1) με μ αρνητικό λόγω πληθωρισμού. Η εταιρεία αναπροσαρμόζει την τιμή σε τακτά χρονικά διαστήματα όμως κάθε αναπροσαρμογή συνεπάγεται πάγια και αναλογικά κόστη (menu costs). Ο σκοπός της εταιρείας είναι η μεγιστοποίηση των καθαρών κερδών της σε έναν άπειρο χρονικό ορίζοντα. Το συγκεκριμένο πρόβλημα μελετήθηκε με το μαθηματικό υπόβαθρο που εξετάζουμε εδώ, από τον Plehn-Dujowich [76].

Παράδειγμα 1.3 Βέλτιστες στρατηγικές συγκομιδής / διανομής μερίσματος

Στατιστικές έρευνες έχουν δείξει ότι τα αποθέματα ρευστών κεφαλαίων πολλών εταιρειών αλλά και οι πληθυσμοί ζώων και ψαριών περιγράφονται ικανοποιητικά από στοχαστικές διαδικασίες που έχουν την τάση να επιστρέφουν σε ένα σημείο ισορροπίας (mean reverting stochastic processes). Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιας διαδικασίας δίνεται από την παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dX_t = (\delta(\rho - X_t) - c)dt + \sigma dW_t \quad (1.2)$$

όπου $\rho - c/\delta$ είναι το σημείο ισορροπίας και σ η σταθερά μεταβλητότητας της διαδικασίας. Το ζητούμενο είναι να βρεθούν οι βέλτιστες στρατηγικές που μεγιστοποιούν τα καθαρά μερισματικά κέρδη των μετόχων και αντίστοιχα τα καθαρά κέρδη συγκομιδής αφού έχουν αφαιρεθεί τα (πάγια και αναλογικά) κόστη διανομής μερίσματος / διεξαγωγής της συγκομιδής. Ένα κριτήριο βελτιστοποίησης για το παραπάνω πρόβλημα σχετίζεται με τη μεγιστοποίηση της παρακάτω παράστασης:

$$J(x; T, \xi) := E_x \left[\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda \tau_n} g(\xi_n) I_{\{\tau_n < \theta\}} \right] \quad (1.3)$$

όπου η συνάρτηση $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται ως

$$g(\eta) := -K + \frac{1}{\gamma} (k\eta)^\gamma \quad (1.4)$$

ενώ K και k είναι θετικές σταθερές και το $\gamma \in (0, 1]$ είναι μία σταθερά η οποία εκφράζει το βαθμό αποστροφής κινδύνου. Επιπλέον τα τ_n, ξ_n εκφράζουν το χρόνο και αντίστοιχα το μέγεθος της n -στης διανομής μερίσματος (συγκομιδής), το θ το χρόνο στον οποίο τα αποθέματα της εταιρείας μηδενίζονται (αντίστοιχα το χρόνο στον οποίο ο πληθυσμός έχει εξοντωθεί) και λ είναι ο υφαιρετικός ρυθμός. Τέτοια προβλήματα έχουν εξεταστεί μεταξύ άλλων από τους Cadenillas κ.α. [21, 22], Alvarez [2], Alvarez και Virtanen [3], Bayraktar και Egami [7].

Παράδειγμα 1.4 Έλεγχος συναλλαγματικής ισοτιμίας

Οι Cadenillas και Zapatero [19] θεώρησαν το παρακάτω στοχαστικό μοντέλο –γεωμετρικής κίνησης Brown- για την εξέλιξη μίας συναλλαγματικής ισοτιμίας

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t. \quad (1.5)$$

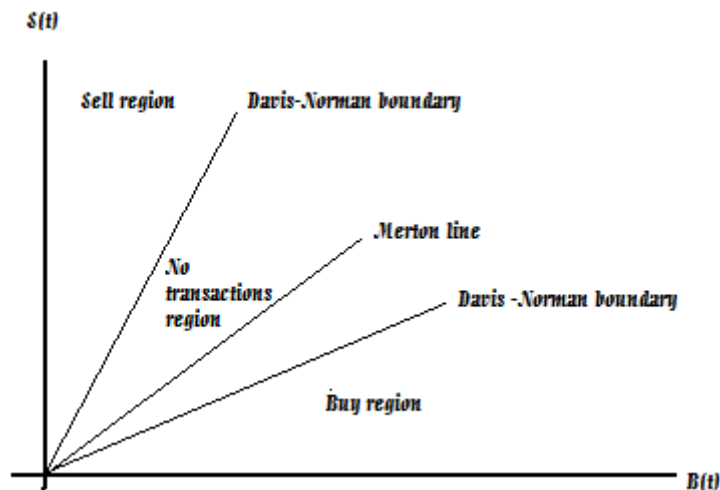
Το ζητούμενο στην προκειμένη περίπτωση είναι η εύρεση βέλτιστων στρατηγικών οι οποίες διατηρούν την ισοτιμία κοντά σε ένα επιθυμητό επίπεδο και παράλληλα δεν είναι ιδιαίτερα επιβαρυντικές από άποψη κόστους. Σύμφωνα με τους Cadenillas και Zapatero μια κεντρική τράπεζα επιθυμεί την ελαχιστοποίηση του παρακάτω συναρτησοειδούς:

$$J(x; T, \xi) := E \left[\int_0^T e^{-\lambda t} f(X_t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda \tau_n} g(\xi_n) I_{\{\tau_n < \infty\}} \right] \quad (1.6)$$

όπου η f είναι μία τετραγωνική συνάρτηση που εκφράζει τις απώλειες λόγω της απόστασης της ισοτιμίας από ένα επιθυμητό επίπεδο και g είναι μία γραμμική συνάρτηση που αντιστοιχεί στα κόστη προσαρμογής. Τα τ_n, ξ_n εκφράζουν το χρόνο και το μέγεθος της n -στης προσαρμογής) και το λ αντιστοιχεί στον υφαιρετικό ρυθμό. Παραλλαγές του προβλήματος εξετάστηκαν επίσης από τους Cadenillas και Zapatero [20], Jeanblanc-Picque [42], Jack και Zervos [41], Melas και Zervos [62].

Η ανάπτυξη της μαθηματικής έρευνας που αφορά προβλήματα στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές ακολούθησε την έρευνα που σχετίζεται με προβλήματα στοχαστικού ελέγχου στα οποία οι αναπροσαρμογές μίας στοχαστικής διαδικασίας δεν συνεπάγονται κόστη και προβλήματα singular στοχαστικού ελέγχου στα οποία οι αναπροσαρμογές συνεπάγονται κόστη ανάλογα του μεγέθους της προσαρμογής. Μαθηματικές τεχνικές του πρώτου είδους -οι οποίες περιγράφονται στο βιβλίο των Fleming και Rishel [33]- εφαρμόστηκαν στις αρχές της δεκαετίας του εβδομήντα από τους Merton [64, 65] και Black και Scholes [12] για τον καθορισμό του βέλτιστου χαρτοφυλακίου –με βάση μία συνάρτηση ωφέλειας και πεπερασμένο ή άπειρο χρονικό ορίζοντα- και την αποτίμηση χρηματιστηριακών παραγώγων. Οι Merton, Black και Scholes τιμήθηκαν με το βραβείο Nobel για τις παραπάνω συνεισφορές τους, το 1997. Η μαθηματική έρευνα που σχετίζεται με προβλήματα singular στοχαστικού ελέγχου ξεκίνησε στις αρχές της δεκαετίας του ενενήντα. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμογής τέτοιων μεθόδων αποτελεί το άρθρο των Davis και Norman [26] όπου το πρόβλημα ήταν ο βέλτιστος έλεγχος ενός απλού χαρτοφυλακίου που αποτελείται από μία επενδυτική επιλογή που ενέχει κίνδυνο (όπως π.χ. μία μετοχή) και μία επενδυτική επιλογή με μικρότερες αναμενόμενες αποδόσεις για τις οποίες

δεν υπάρχει αβεβαιότητα (π.χ. τραπεζικές καταθέσεις). Σχηματικά οι βέλτιστες στρατηγικές παρουσιάζονται στο γράφημα 1.2: Ο επενδυτής υπό την παρουσία κοστών ανάλογων του ποσού της κάθε του συναλλαγής δεν ακολουθεί συνεχώς την ευθεία του Merton (αν την ακολουθούσε θα καταστρεφόταν πολύ γρήγορα) αλλά αφήνει την επενδυτική αναλογία του χαρτοφυλακίου του να μεταβάλλεται ελεύθερα σε μία περιοχή ελέγχου. Όταν η αναλογία χαρτοφυλακίου ξεπεράσει τα όρια του διαστήματος ελέγχου ο επενδυτής κάνει την ελάχιστη συναλλαγή που θα φέρει την επενδυτική του αναλογία μέσα στο βέλτιστα καθορισμένο διάστημα ελέγχου. Με δεδομένο ότι θεωρούμε συνεχείς στοχαστικές διαδικασίες τέτοιου είδους στρατηγικές μπορούν να οδηγήσουν σε συνεχείς συναλλαγές πάνω στα σύνορα ελέγχου. Με την παρουσία πάγιου κόστους συναλλαγής τέτοιου είδους στρατηγικές είναι προφανώς μη βέλτιστες και μπορούν να οδηγήσουν σε οικονομική καταστροφή.



Γράφημα 1.2 Σχηματική παρουσίαση των βέλτιστων στρατηγικών που προκύπτουν με χρήση θεωρίας singular στοχαστικού ελέγχου για το επενδυτικό πρόβλημα των Davis και Norman [26].

Τα προβλήματα στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές που εξετάζονται σε αυτή την εργασία διατυπώνονται συνοπτικά ως εξής.

Πρόβλημα 1.1 Μία εταιρεία επιθυμεί να εκτιμήσει τους βέλτιστους χρόνους και τα ποσά των μη αναστρέψιμων επενδύσεων οι οποίες θα βελτιώσουν τις παραγωγικές της δυνατότητες. Η εταιρεία αντιμετωπίζει πάγια και αναλογικά κόστη για τη διεκπεραίωση κάθε επένδυσης και στοχεύει στην μεγιστοποίηση των αναμενόμενων καθαρών κερδών της σε έναν άπειρο χρονικό ορίζοντα. Δοθείσας αρχικής επένδυσης μεγέθους $k \geq 0$ στην εταιρεία και διαδοχικών μη αναστρέψιμων επενδύσεων που

εκφράζονται από τα ζεύγη χρόνων-ποσών τ_n, ξ_n οι δυνατότητες παραγωγής της εταιρείας εκφράζονται από την παρακάτω γενικευμένη εξίσωση Ito:

$$K_t = k - \int_0^t \delta K_s ds + \int_0^t \gamma K_s dW_s + \sum_{n=1}^{\infty} I_{\{\tau_n < t\}} \xi_n, \quad (1.7)$$

όπου το $\delta \geq 0$ εκφράζει το ρυθμό με τον οποίο φθίνουν οι δυνατότητες παραγωγής υπό την απουσία επενδύσεων και το $\gamma > 0$ εκφράζει τη μεταβλητότητα της διαδικασίας. Υποθέτουμε ότι η εταιρεία στοχεύει στη μεγιστοποίηση των καθαρών κερδών της που εκφράζονται μέσω μιας συνάρτησης των δυνατοτήτων παραγωγής της $\Pi(K_t)$. Εν προκειμένω η εταιρεία στοχεύει στη μεγιστοποίηση του παρακάτω συναρτησοειδούς:

$$J(k, T, \xi) := E_k \left[\int_0^{\infty} e^{-rt} \Pi(K_t) dt - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-r\tau_n} \left((C + C_1 \xi_n) I_{\{\xi_n > 0\}} I_{\{\tau_n < \infty\}} \right) \right] \quad (1.8)$$

το οποίο εκφράζει τα καθαρά κέρδη της σε έναν άπειρο χρονικό ορίζοντα. Το r αντιπροσωπεύει τον υφαιρετικό ρυθμό, οι σταθερές C, c αντιστοιχούν στα πάγια και αναλογικά κόστη, και ισχύει $C_1 = 1 + c$.

Πρόβλημα 1.2 Ένας επενδυτής υιοθετεί κριτήρια βελτιστοποίησης τα οποία υπό τις συνήθεις υποθέσεις σχετικά με την αγορά (αποδόσεις που ακολουθούν γεωμετρική κίνηση Brown, ανέξοδες συναλλαγές) τον οδηγούν στην απόφαση ότι πρέπει να τοποθετήσει ένα συγκεκριμένο ποσό χ σε μία μετοχή¹. Στην πράξη, εφόσον πρέπει να αντιμετωπίσει αναλογικά και πάγια κόστη σε κάθε του συναλλαγή, δεν μπορεί να ακολουθήσει αυτή ακριβώς τη στρατηγική. Για την υλοποίηση της στρατηγικής του επιλέγει ένα διάστημα ελέγχου (L, U) με $L < \chi < U$ μέσα στην οποία επιτρέπει η επένδυσή του να μεταβάλλεται χωρίς ο ίδιος να επεμβαίνει. Όταν η επένδυσή του φτάσει στο U αποταμιεύει το ποσό $U - \chi$ και φέρνει την επένδυσή του πάλι στο χ . Αντίστοιχα όταν το ποσό της επένδυσής του πέσει στο κάτω όριο L , ενισχύει την επένδυσή του με ποσό $L - \chi$ για να φτάσει ξανά στο επίπεδο χ . Τα U και L επιλέγονται τέτοια ώστε οι αποταμιεύσεις να μεγιστοποιούν μία συνάρτηση ωφέλειας και οι επιπλέον επενδύσεις να ελαχιστοποιούν μια ενδεχομένως διαφορετική συνάρτηση ωφέλειας.

Με την ενδεχόμενη παρουσία επεμβάσεων, θεωρούμε ότι η επένδυση εξελίσσεται με βάση την παρακάτω γενικευμένη στοχαστική διαδικασία Ito

¹ Τέτοιες στρατηγικές αποδεικνύονται βέλτιστες υπό τις συνήθεις υποθέσεις για τις συνθήκες της αγοράς όταν ο επενδυτής υιοθετεί εκθετική συνάρτηση ωφέλειας (Merton [66]).

$$X_t = \chi + \int_0^t \mu X_s ds + \int_0^t \sigma X_s dW_s - \sum_{n=1}^{\infty} I_{\{\tau_n < t\}} \xi_n \quad (1.9)$$

όπου μ είναι μία μη αρνητική σταθερά που εκφράζει τις αναμενόμενες αποδόσεις, το σ εκφράζει τη μεταβλητότητα της επένδυσης, το χ αντιπροσωπεύει το αρχικό (και στοχευόμενο) ποσό επένδυσης ενώ το ζεύγος τ_n, ξ_n εκφράζει το χρόνο και το μέγεθος της n -στης επέμβασης στην επένδυση αντίστοιχα. Στόχος του επενδυτή είναι η μεγιστοποίηση της παρακάτω παράστασης

$$J(x, T, \xi) := E_x \left[\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda \tau_n} (g_1(\xi_n) I_{\{\xi_n > 0\}} + g_2(-\xi_n) I_{\{\xi_n < 0\}}) I_{\{\tau_n < \infty\}} \right] \quad (1.10)$$

όπου

$$g_1(\xi) := -K_1 + \frac{1}{\gamma_1} (k_1 \xi)^{\gamma_1} I_{\{\xi > 0\}}, \quad g_2(\xi) := -K_2 - \frac{1}{\gamma_2} (k_2 \xi)^{\gamma_2} I_{\{\xi < 0\}} \quad (1.11)$$

Πρόβλημα 1.3 Ένας επενδυτής υιοθετεί κριτήρια βελτιστοποίησης τα οποία υπό τις συνήθεις υποθέσεις σχετικά με την αγορά (αποδόσεις που ακολουθούν γεωμετρική κίνηση Brown, ανέξοδες συναλλαγές) τον οδηγούν στην απόφαση ότι πρέπει να τοποθετήσει μία σταθερή αναλογία του συνολικού υπό επένδυση κεφαλαίου του σε μία συγκεκριμένη επένδυση που ενέχει κίνδυνο². Το πρόβλημα που αντιμετωπίζει ο επενδυτής στην πράξη είναι: Τι επενδυτική στρατηγική πρέπει να ακολουθήσει εφόσον είναι δεδομένη η παρουσία πάγιου και αναλογικού κόστους ανά συναλλαγή? Εδώ εξετάζουμε μία απλή εκδοχή του παραπάνω προβλήματος. Θεωρούμε ότι οι επενδυτικές επιλογές περιορίζονται σε δύο: μία σταθερής απόδοσης και μηδενικού κινδύνου και μία με μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση αλλά και με τυχαίες διακυμάνσεις που δημιουργούν αβεβαιότητα. Προφανώς, ο επενδυτής επιθυμεί να βρίσκεται κοντά στις αναλογίες τις οποίες έχει προαποφασίσει ενώ δεν θέλει να επεμβαίνει συχνά για να επαναφέρει το χαρτοφυλάκιό του στις αναλογίες στόχους ώστε να αποφύγει τα πολλά κόστη συναλλαγών. Στην προκειμένη περίπτωση, ο επενδυτής επιθυμεί να ελαχιστοποιήσει έναν συνδυασμό που αποτελείται από μία (δευτέρου βαθμού) συνάρτηση απώλειας για την απόσταση των αναλογιών του χαρτοφυλακίου από τις αναλογίες στόχους και μία γραμμική συνάρτηση των κοστών συναλλαγής.

² Τέτοιες στρατηγικές αποδεικνύονται βέλτιστες υπό τις συνήθεις υποθέσεις για τις συνθήκες της αγοράς όταν ο επενδυτής υιοθετεί συνάρτηση ωφέλειας τύπου HARA (Merton [66]).

Η στοχαστική διαδικασία που εκφράζει τις μεταβολές της αναλογιών χαρτοφυλακίου έχει τη μορφή

$$db_t = b_t(1 - b_t)(\mu - r - \sigma^2 b_t)dt + b_t(1 - b_t)\sigma dW_t \quad (1.12)$$

όπου μ είναι η αναμενόμενη απόδοση της επένδυσης που ενέχει κίνδυνο, r η σταθερή απόδοση της επένδυσης που δεν ενέχει κίνδυνο και σ η σταθερά μεταβλητότητας της επένδυσης που ενέχει κίνδυνο. Ο επενδυτής επιθυμεί να ελαχιστοποιήσει το παρακάτω συναρτησοειδές

$$J(b_0, \{(b_n, \tau_n)\}) := E_{b_0}^{\{(b_n, \tau_n)\}} \left[\lambda \int_0^\infty e^{-\beta t} g(b(t)) dt + \sum_{n=1}^\infty e^{-\beta \tau_n} c(b(\tau_n^-), b_n) \mathbf{1}_{\{\tau_n < \infty\}} \right], \quad (1.13)$$

όπου g είναι μία τετραγωνική συνάρτηση απώλειας για την απόσταση της παρατηρούμενης αναλογίας σε σχέση με τη στοχευόμενη και c είναι μία συνάρτηση που εκφράζει τα (πάγια και αναλογικά) κόστη αναπροσαρμογής του χαρτοφυλακίου.

Εξ' όσων γνωρίζουμε τα προβλήματα 1.1 και 1.2 εξετάζονται για πρώτη φορά. Το πρόβλημα 1.3 έχει εξεταστεί από τους Pliska και Suzuki [77] –στην παρούσα εργασία το επιλύουμε χρησιμοποιώντας έναν μετασχηματισμό ο οποίος διευκολύνει σημαντικά (και κάνει πιο αξιόπιστους) τους υπολογισμούς που οδηγούν στην εύρεση της συνάρτησης αξίας και των βέλτιστων στρατηγικών. Τα κριτήρια βελτιστοποίησης στα παραπάνω προβλήματα είναι υφαιρετικά: στόχος είναι η μεγιστοποίηση των καθαρών κερδών ή η ελαχιστοποίηση το καθαρών απωλειών σε έναν άπειρο χρονικό ορίζοντα. Οι Jack και Zervos [41] σε μία πρόσφατη εργασία τους παρατηρούν ότι για προβλήματα όπως αυτό του παραδείγματος 1.4 (αλλά και το πρόβλημα 1.3) έχει περισσότερο νόημα η εξέταση ενός εργοδικού κριτηρίου βελτιστοποίησης μέσω του οποίου ζητείται η μεγιστοποίηση των αναμενόμενων κερδών ανά μονάδα χρόνου ή αντίστοιχα η ελαχιστοποίηση των αναμενόμενων απωλειών ανά μονάδα χρόνου. Οι Jack και Zervos [41] παρουσιάζουν μία μεθοδολογία επίλυσης τέτοιων προβλημάτων η οποία μπορεί να εφαρμοστεί σε μικρό σχετικά πλήθος προβλημάτων. Η κύρια συνεισφορά της παρούσας εργασίας είναι ότι επιλύει εργοδικά προβλήματα με μία διαφορετική μεθοδολογία –που συνδυάζει μεθόδους στοχαστικού λογισμού και αριθμητικές μεθόδους μη γραμμικής βελτιστοποίησης- η οποία καλύπτει μεγάλο εύρος προβλημάτων. Στο τέταρτο και πέμπτο κεφάλαιο επιλύουμε τις εργοδικές εκδοχές των προβλημάτων 1.2 και 1.3 και συγκρίνουμε τις βέλτιστες στρατηγικές με αυτές που προκύπτουν από τα αντίστοιχα υφαιρετικά προβλήματα. Μία τέτοια σύγκριση παρουσιάζεται για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία.

Η εργασία εξελίσσεται ως εξής. Στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζουμε κάποια βασικά αποτελέσματα που εφαρμόζονται στην ανάλυση στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές. Στο τρίτο κεφάλαιο επιλύουμε το πρόβλημα 1.1 με χρήση qv-ανισοτήτων –της κλασσικής μεθόδου επίλυσης για υφαιρετικά προβλήματα. Συγκρίνουμε επίσης τα αποτελέσματα με αυτά του αντίστοιχου singular στοχαστικού ελέγχου όπως επιλύθηκε πρόσφατα από τον Pham [75] και δίνουμε έμφαση στην εξάρτηση των βέλτιστων στρατηγικών από τον υφαιρετικό ρυθμό. Στο τέταρτο κεφάλαιο επιλύεται το πρόβλημα 1.2 για εργοδικά και υφαιρετικά κριτήρια βελτιστοποίησης και συγκρίνονται οι βέλτιστες στρατηγικές. Στο πέμπτο κεφάλαιο επιλύεται το πρόβλημα 1.3 με εργοδικά και υφαιρετικά κριτήρια βελτιστοποίησης και συγκρίνονται οι βέλτιστες στρατηγικές. Το περιεχόμενο των κεφαλαίων 3-5 έχει υποβλήθηκε πρόσφατα προς δημοσίευση [45, 46, 47]. Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα ενώ το έβδομο κεφάλαιο περιέχει το παράρτημα στο οποίο διατυπώνονται μαθηματικές αποδείξεις που σχετίζονται με θεωρήματα που παρουσιάζονται στο τέταρτο κεφάλαιο.

2 Στοχαστικός έλεγχος με κόστη προσαρμογής: Εισαγωγικά αποτελέσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο αναλύουμε ένα απλό πρόβλημα στοχαστικού ελέγχου με κόστη προσαρμογής και υφαιρετικά κριτήρια βελτιστοποίησης. Διατυπώνονται τα κριτήρια που πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση αξίας στα σημεία ελέγχου και η μέθοδος εύρεσης των βέλτιστων στρατηγικών. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται προέρχονται κυρίως από το σχετικό άρθρο του Dixit [30] ενώ χρησιμοποιούνται στοιχεία από τα άρθρα των Dumas [32] και Korn [53].

2.1 Το πρόβλημα και η διατύπωσή του μέσω αλυσίδων Markov

Θεωρούμε μία μεταβλητή X η οποία στην απουσία ελέγχου εξελίσσεται σύμφωνα με τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t. \quad (2.1.1)$$

Η εφαρμοζόμενη στρατηγική ελέγχου επιτρέπει στη διαδικασία να εξελίσσεται ελεύθερα σε ένα διάστημα (s, r) —ο έλεγχος εφαρμόζεται όταν η διαδικασία βρεθεί στα άκρα του διαστήματος. Εξετάζουμε δύο περιπτώσεις: στην πρώτη κάθε έλεγχος συνεπάγεται την ύπαρξη πάγιου κόστους οπότε ο έλεγχος συνίσταται στη (μη συνεχή) μετατόπιση της X σε εσωτερικό σημείο του διαστήματος (s, r) . Στη δεύτερη περίπτωση δεν υπάρχει πάγιο κόστος και γίνεται ο ελάχιστος δυνατός έλεγχος που διατηρεί την X μέσα στο διάστημα ελέγχου. Οι δύο περιπτώσεις περιγράφονται με περισσότερη σαφήνεια παρακάτω.

(1) *Στοχαστικός έλεγχος με διακριτές προσαρμογές:* Όταν η στοχαστική διαδικασία βρεθεί στο s μετακινείται στο σημείο S εσωτερικά του διαστήματος με συνολικό κόστος C_s το οποίο είναι συνδυασμός του πάγιου κόστους και ενός κόστους ανάλογου του μεγέθους της προσαρμογής της X ,

$$C_s = a_s + b_s(S - s). \quad (2.1.2)$$

Όταν η X βρεθεί στο r μετακινείται στο σημείο R εσωτερικά του διαστήματος με κόστος

$$C_r = a_r + b_r(r - R). \quad (2.1.3)$$

(2) *Singular στοχαστικός έλεγχος:* Όταν η στοχαστική διαδικασία βρεθεί στο s αυξάνεται κατά πολύ μικρή ποσότητα ds με κόστος

$$dc_s = b_s ds . \quad (2.1.4)$$

Όμοια, όταν η στοχαστική διαδικασία βρεθεί στο r αυξάνεται κατά πολύ μικρή ποσότητα dr με κόστος

$$dc_r = b_r dr . \quad (2.1.5)$$

Και στις δύο περιπτώσεις το b_r μπορεί να είναι αρνητικό, για να εκφράζει για παράδειγμα έσοδα.

Ορίζουμε μία συνάρτηση ανταμοιβής $f(x)$ και έναν σταθερό υφαιρετικό ρυθμό ρ . Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω ορίζεται η αναμενόμενη τιμή του καθαρού κέρδους, για μία στοχαστική διαδικασία που ξεκινά από το $x \in (s, r)$ και στην οποία εφαρμόζεται έλεγχος του τύπου (1) ή του τύπου (2):

$$F(x) = E \left\{ \int_0^\infty e^{-\rho t} f(x_t) dt - \text{κόστη έλεγχου} | x_0 = x \right\} \quad (2.1.6)$$

Ο στόχος είναι η αποτίμηση του $F(x)$ για δοθέντα s, S, R και r στην περίπτωση στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές ή για δοθέντα s και r στην περίπτωση singular στοχαστικού ελέγχου και να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων για τις οποίες το $F(x)$ μεγιστοποιείται.

Για να πραγματοποιήσουμε διακριτή προσέγγιση στο πρόβλημα θεωρούμε μικρά χρονικά διαστήματα μεγέθους τ και αντίστοιχα βήματα μεγέθους ξ για τη στοχαστική διαδικασία η οποία κυμαίνεται πια σε ένα εύρος διακριτών τιμών X_i έτσι ώστε να ισχύει

$$X_{i+1} - X_i = \xi \quad \text{για κάθε } i. \quad (2.1.7)$$

Αν δεν υπήρχε έλεγχος για τη στοχαστική διαδικασία που βρίσκεται στο X_i τη στιγμή τ την επόμενη χρονική στιγμή θα έπαιρνε τις τιμές

$$\begin{cases} X_{i-1} & \text{με πιθανότητα } p \\ X_{i+1} & \text{με πιθανότητα } q = 1 - p \end{cases} \quad (2.1.8)$$

Τα p, q, τ, ξ πρέπει να είναι συμβατά με την αρχική στοχαστική διαδικασία. Εξισώνοντας τις αναμενόμενες τιμές παίρνουμε τη σχέση

$$\mu\tau = q\xi + p(-\xi) \quad (2.1.9)$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση $p+q=1$ παίρνουμε

$$q = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu\tau}{\xi} \right), \quad p = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu\tau}{\xi} \right). \quad (2.1.10)$$

Εξισώνοντας τις διασπορές παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sigma^2 \tau &= q(\xi - \mu\tau)^2 + p(\xi + \mu\tau)^2 \\ &= (q+p)\xi^2 - 2(q-p)\xi\mu\tau + (q+p)\mu^2\tau^2 \\ &= \xi^2 - \mu^2\tau^2. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Μία ικανοποιητική προσέγγιση της παραπάνω σχέσης δίνεται από την σχέση

$$\sigma^2 \tau = \xi^2. \quad (2.1.12)$$

Οριακά, καθώς τα τ και ξ τείνουν στο μηδέν στη σχέση (2.1.12), ο διακριτός τυχαίος περίπατος συγκλίνει στη συνεχή κίνηση Brown. Περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με την διακριτή προσέγγιση μίας συνεχούς στοχαστικής διαδικασίας βρίσκονται στο άρθρο των Cox και Ross [24].

Έστω l, L, M, m δείκτες που αντιστοιχούν στα s, S, R , και r δηλαδή,

$$X_l = s, \quad X_L = S, \quad X_M = R, \quad X_m = r. \quad (2.1.13)$$

Όταν ο τυχαίος περίπατος βρίσκεται στο $i=l+1$, αν το επόμενο βήμα γίνει προς τα δεξιά δεν εφαρμόζεται έλεγχος. Αν όμως το επόμενο βήμα γίνει στο l τότε ο τυχαίος περίπατος μετακινείται αμέσως στο L . Έτσι, ξεκινώντας από το X_{l+1} ο τυχαίος περίπατος μεταβαίνει στα

$$\begin{cases} X_L & \text{με πιθανότητα } p, \\ X_{l+2} & \text{με πιθανότητα } q=1-p. \end{cases}$$

Παρόμοια, ξεκινώντας από το X_{m-1} έχουμε μετάβαση στα

$$\begin{cases} X_{m-2} & \text{με πιθανότητα } p, \\ X_M & \text{με πιθανότητα } q=1-p. \end{cases}$$

Οι πιθανότητες μετάβασης για δύο ή περισσότερα χρονικά διαστήματα δίνονται από τις κατάλληλες δυνάμεις του πίνακα μετάβασης A που φαίνεται παρακάτω.

Συνεπώς, η υπό έλεγχο μεταβλητή εξελίσσεται ως αλυσίδα Markov για $i=l+1, \dots, m-1$. Το στοιχείο της i γραμμής και της j στήλης του παρακάτω πίνακα αντιστοιχεί στην πιθανότητα μετάβασης από το X_i στο X_j μέσα σε χρονικό διάστημα τ .

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} & l+1 & l+2 & l+3 & \dots & L & \dots & M & \dots & m-3 & m-2 & m-1 \\ \begin{array}{c} l+1 \\ l+2 \\ \vdots \\ m-2 \\ m-1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ p \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} q \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ q \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \ddots \\ \dots \\ \dots \end{array} & \begin{array}{c} p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \ddots \\ \dots \\ \dots \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q \end{array} & \begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \ddots \\ \dots \\ \dots \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ p \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ q \\ 0 \end{array} \end{array} \end{array} \quad (2.1.14)$$

Ο έλεγχος που ασκείται στο κάτω όριο του διαστήματος φέρνει τον τυχαίο περίπατο από το l στο L . Το κόστος που του αντιστοιχεί δίνεται από τη διακριτή εκδοχή της σχέσης (2.1.2)

$$C_s = a_s + b_s \xi(L-l). \quad (2.1.15)$$

Ο singular έλεγχος προκύπτει ως ειδική περίπτωση. Θεωρούμε ότι ο ελάχιστος έλεγχος μετακινεί τον τυχαίο περίπατο κατά ένα βήμα, δηλαδή $L=l+1$. Εφόσον $a_s = 0$ στην περίπτωση singular ελέγχου η (2.1.15) γίνεται

$$dc_s = b_s \xi, \quad (2.1.16)$$

που είναι η διακριτή εκδοχή της (2.1.4).

Παρόμοια, για το άνω όριο ελέγχου έχουμε

$$C_r = a_r + b_r \xi(m-M), \quad (2.1.17)$$

και για την ειδική περίπτωση singular στοχαστικού ελέγχου για τον οποίο ισχύει $M=m-1$ και $a_r = 0$, έχουμε

$$dc_r = b_r \xi. \quad (2.1.18)$$

2.2 Η συνάρτηση αξίας

Θεωρούμε σταθερά σημεία ελέγχου s, S, R , και r και τους αντίστοιχους δείκτες l, L, M, m . Ορίζουμε το διάνυσμα ροής καθαρών ανταμοιβών (όπου τα κόστη αναπροσαρμογής λαμβάνονται υπόψη)

$$f = (f_i | i = l+1, \dots, m-1). \quad (2.2.1)$$

Για $i=l+2, \dots, m-2$ ισχύει

$$f_i = f(X_i)\tau \quad (2.2.2)$$

ενώ όταν $i=l+1$ έχουμε

$$f_{l+1} = f(X_{l+1})\tau - p[a_s + b_s \xi(L-l)] \quad (2.2.3)$$

και αντίστοιχα στο άνω όριο

$$f_{m-1} = f(X_{m-1})\tau - q[a_r + b_r \xi(m-M)] \quad (2.2.4)$$

Συμβολίζουμε με F διάνυσμα στήλη που αντιστοιχεί στη συνάρτηση αξίας $F(x)$. Το i -οστό του στοιχείο είναι το $F(X_i)$, τα αναμενόμενα κέρδη μείον τα κόστη προσαρμογής για τη διαδικασία που ξεκινά από το i . Διαδοχικές εφαρμογές του πίνακα μετάβασης δίνουν

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\rho\tau} A^k f. \quad (2.2.5)$$

Θέτοντας $B = e^{-\rho\tau} A$ έχουμε

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} B^k f = (I - B)^{-1} f$$

ή

$$(I - B)F = f. \quad (2.2.6)$$

Για δείκτη i η (2.2.6) έχει τη μορφή

$$-e^{-\rho\tau} pF(X_{i-1}) + F(X_i) - e^{-\rho\tau} qF(X_{i+1}) = f(X_i)\tau. \quad (2.2.7)$$

Πολλαπλασιάζοντας με $e^{\rho\tau}$ και αναδιατάσσοντας τους όρους της (2.2.7) παίρνουμε

$$[e^{\rho\tau} - 1]F(X_i) - p[F(X_{i-1}) - F(X_i)] - q[F(X_{i+1}) - F(X_i)] = e^{\rho\tau} f(X_i)\tau.$$

Στη συνέχεια παίρνουμε το ανάπτυγμα Taylor και εφόσον το ξ^2 είναι τάξεως τ το δεξί μέλος ισούται με

$$f(X_i) + o(\tau)$$

όπου με $o(\tau)$ συμβολίζουμε τους όρους που τείνουν στο μηδέν πιο γρήγορα από το τ . Για το αριστερό μέλος χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.1.10), (2.1.12) παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \rho\tau F(X_i) - p\left[-F'(X_i)\xi + \frac{1}{2}F''(X_i)\xi^2\right] - q\left[F'(X_i)\xi + \frac{1}{2}F''(X_i)\xi^2\right] + o(\tau) \\ &= \rho\tau F(X_i) - F'(X_i)(q-p)\xi - \frac{1}{2}F''(X_i)(q+p)\xi^2 + o(\tau) \\ &= \rho\tau F(X_i) - \mu\tau F'(X_i) - \frac{1}{2}\sigma^2\tau F''(X_i) + o(\tau). \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τα δύο μέλη, διαιρώντας με τ , παίρνοντας το όριο για τ που τείνει στο μηδέν και αντικαθιστώντας το X_i με το X παίρνουμε την παρακάτω διαφορική εξίσωση

$$\frac{1}{2}\sigma^2 F''(X) + \mu F'(X) - \rho F(X) + f(X) = 0. \quad (2.2.8)$$

Εφόσον οι παραπάνω υπολογισμοί έγιναν για $i=l+2, \dots, m-2$ η παραπάνω διαφορική εξίσωση ισχύει για $s < X < r$. Πρόκειται για μία γραμμική εξίσωση της οποίας η γενική λύση γράφεται ως το άθροισμα δύο συστατικών, της γενικής λύσης της ομογενούς εξίσωσης και οποιασδήποτε ειδικής λύσης της (2.2.8).

Η λύση της ομογενούς έχει τη μορφή

$$C_1 e^{a_1 X} + C_2 e^{a_2 X}$$

με C_1, C_2 σταθερές που καθορίζονται μέσω των συνοριακών συνθηκών και a_1, a_2 είναι οι (πραγματικές και με αντίθετο πρόσημο) ρίζες της

$$\frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \mu z - \rho = 0. \quad (2.2.9)$$

Μία ενδιαφέρουσα ειδική λύση της (2.2.8) σχετίζεται με τα αναμενόμενα καθαρά κέρδη υπό την απουσία ελέγχου

$$V(X) \equiv E \left\{ \int_0^\infty e^{-\rho t} f(X_t) dt \mid X_0 = X \right\}. \quad (2.2.10)$$

Η γενική λύση της (2.2.8) δίνεται από τη σχέση

$$F(X) = C_1 e^{a_1 X} + C_2 e^{a_2 X} + V(X) \quad (2.2.11)$$

η οποία έχει την παρακάτω ερμηνεία. Εφόσον το $V(X)$ εκφράζει τα αναμενόμενα καθαρά κέρδη υπό την απουσία ελέγχου οι πρώτοι δύο όροι στο αριστερό μέλος της (2.2.11) πρέπει να εκφράζουν την πρόσθετη αξία που προσδίδει η δυνατότητα βέλτιστου ελέγχου.

Παρόμοια, οι συνοριακές συνθήκες ελέγχου παρέχουν την αναγκαία πληροφορία ώστε να καθοριστούν οι σταθερές C_1, C_2 . Στο $i=l+1$ από τη (2.2.6) παίρνουμε

$$\begin{aligned} & -e^{-\rho \tau} p F(X_L) + F(X_{l+1}) - e^{-\rho \tau} q F(X_{l+2}) \\ & = f(X_{l+1}) \tau - p[a_s + b_s \xi(L-l)] \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} & e^{\rho \tau} F(X_{l+1}) - p F(X_L) - q F(X_{l+2}) \\ & = e^{\rho \tau} f(X_{l+1}) \tau - e^{\rho \tau} p[a_s + b_s \xi(L-l)] \end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση απλοποιείται διαφορετικά στις περιπτώσεις στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές και singular στοχαστικού ελέγχου. Στην πρώτη περίπτωση το αριστερό μέλος γράφεται

$$\begin{aligned} & [1 + \rho \tau + o(\tau)] [F(s) + \xi F'(s) + o(\xi)] - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu \xi}{\sigma^2} \right) F(S) \\ & - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu \xi}{\sigma^2} \right) [F(s) + 2\xi F'(s) + o(\xi)] \\ & = -\frac{1}{2} [F(S) - F(s)] + O(\xi), \end{aligned}$$

με $O(\xi)$ να συμβολίζει τους όρους για τους οποίους το $\frac{O(\xi)}{\xi}$ είναι άνω φραγμένο όπως το ξ τείνει στο μηδέν. Το δεξί μέλος γράφεται ως

$$\begin{aligned} & \tau[1 + \rho\tau + o(\tau)]\mathbb{I}[f(s) + \xi f'(s) + o(\xi)] - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu\xi}{\sigma^2}\right)[1 + \rho\tau + o(\tau)]\mathbb{I}[a_s + b_s(S - s)] \\ &= -\frac{1}{2}[F(S) - F(s)] + O(\xi). \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τα δύο μέλη για ξ που τείνει στο μηδέν παίρνουμε

$$F(S) - F(s) = a_s + b_s(S - s), \quad (2.2.12)$$

δηλαδή το κέρδος του ελέγχου ισούται με το κόστος του.

Στην περίπτωση singular στοχαστικού ελέγχου το αριστερό μέλος γράφεται ως

$$\begin{aligned} & \left[1 + \rho\tau + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu\xi}{\sigma^2}\right)o(\tau)\right][F(s) + \xi F'(s) + o(\xi)] \\ & - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mu\xi}{\sigma^2}\right)[F(s) + 2\xi F'(s) + o(\xi)] \\ &= -\frac{1}{2}\xi F'(s) + o(\xi), \end{aligned}$$

ενώ το δεξί μέλος έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} & \tau[1 + \rho\tau + o(\tau)]\mathbb{I}[f(s) + \xi f'(s) + o(\xi)] - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu\xi}{\sigma^2}\right)[1 + \rho\tau + o(\tau)]\xi b_s \\ &= -\frac{1}{2}b_s\xi + o(\xi). \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τα δύο μέλη για ξ που τείνει στο μηδέν παίρνουμε

$$F'(s) = b_s. \quad (2.2.13)$$

Παρατηρούμε ότι η παράγωγος της συνάρτησης αξίας ισούται με την παράγωγο της γραμμικής συνάρτησης κόστους. Η παραπάνω συνθήκη, στην περίπτωση singular στοχαστικού ελέγχου ισχύει και για μη βέλτιστες συνοριακές συνθήκες.

Εντελώς όμοια, στο άνω σημείο ελέγχου, ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες ανάλογα με τη μορφή ελέγχου

$$F(R) - F(r) = a_r + b_r(r - R), \quad (2.2.14)$$

$$F'(r) = b_r. \quad (2.2.15)$$

Σε κάθε περίπτωση έχουμε δύο συνοριακές συνθήκες οι οποίες καθορίζουν τα C_1, C_2 στη (2.2.11) οπότε καθορίζουν και την αξία $F(X)$ για δοθείσες παραμέτρους ελέγχου.

2.3 Συνθήκες βέλτιστου ελέγχου

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται οι πρόσθετες συνθήκες που ικανοποιούνται από τους βέλτιστους ελέγχους δίνοντας έμφαση στην περίπτωση του στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές.

Αρχικά χρησιμοποιούμε τη σχέση (2.2.11) για να μετασχηματίσουμε τις συνθήκες (2.2.12), (2.2.14):

$$C_1 [e^{a_1 S} - e^{a_1 s}] + C_2 [e^{a_2 S} - e^{a_2 s}] + [V(S) - V(s)] = a_s + b_s (S - s) \quad (2.3.1)$$

$$C_1 [e^{a_1 R} - e^{a_1 r}] + C_2 [e^{a_2 R} - e^{a_2 r}] + [V(R) - V(r)] = a_r + b_r (r - R). \quad (2.3.2)$$

Παραγωγίζοντας τη (2.3.1) ως προς το r , παίρνουμε

$$\frac{\partial C_1}{\partial r} [e^{a_1 S} - e^{a_1 s}] + \frac{\partial C_2}{\partial r} [e^{a_2 S} - e^{a_2 s}] = 0$$

Εφόσον $S > s$ και τα a_1, a_2 έχουν αντίθετα πρόσημα, οι εκφράσεις στα άγκιστρα έχουν αντίθετα πρόσημα. Επομένως τα $\frac{\partial C_1}{\partial r}, \frac{\partial C_2}{\partial r}$ έχουν το ίδιο πρόσημο. Το ίδιο επιχείρημα εφαρμόζεται στις παραγώγους των C_1, C_2 ως προς τις άλλες τρεις παραμέτρους.

Στη συνέχεια εξετάζουμε την επίδραση των παραμέτρων στο $F(X)$ για δοθέν X . Για παράδειγμα ως προς r έχουμε

$$\frac{\partial F(X)}{\partial r} = \frac{\partial C_1}{\partial r} e^{a_1 X} + \frac{\partial C_2}{\partial r} e^{a_2 X} = 0.$$

Εφόσον οι παράγωγοι στο δεξί μέλος έχουν το ίδιο πρόσημο και τα εκθετικά είναι θετικά η παράσταση έχει σταθερό πρόσημο για κάθε X . Άρα, μία μεταβολή του r είτε μετατοπίζει όλη την $F(X)$ προς τα πάνω είτε προς τα κάτω και το ίδιο ισχύει για κάθε μία από τις τρεις παραμέτρους.

Η συνθήκη για τη βέλτιστη επιλογή του r γράφεται ως $\frac{\partial F(X)}{\partial r} = 0$

ή

$$\frac{\partial C_1}{\partial r} = \frac{\partial C_2}{\partial r} = 0.$$

Παραγωγίζοντας τη (2.3.2) ως προς το r και χρησιμοποιώντας τις παραπάνω συνθήκες, παίρνουμε

$$-C_1 a_1 e^{a_1 r} - C_2 a_2 e^{a_2 r} - V'(r) = b_r,$$

το οποίο συνεπάγεται ότι $F'(r) = -b_r$. Παρόμοια επιχειρήματα ισχύουν για τις υπόλοιπες παραμέτρους.

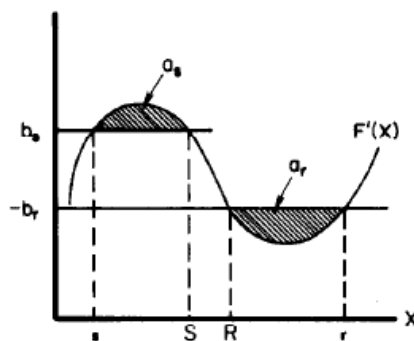
Οι συνθήκες βέλτιστου ελέγχου διατυπώνονται με βάση τα παραπάνω ως εξής

$$F'(s) = b_s = F'(S), \quad (2.3.3)$$

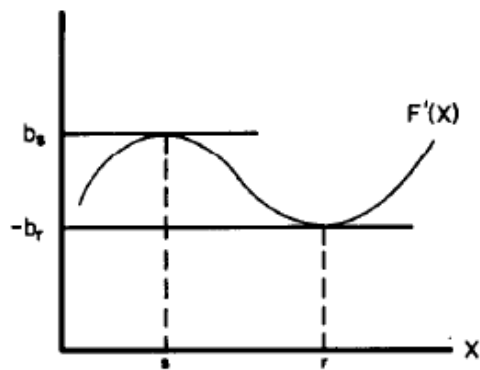
$$F'(r) = -b_r = F'(R). \quad (2.3.4)$$

Τελικά, μέσω των συνθηκών που παρουσιάζονται σε αυτή και την προηγούμενη ενότητα παίρνουμε έξι εξισώσεις από τις οποίες μπορούμε να καθορίσουμε τις παραμέτρους βέλτιστου ελέγχου s, S, R, r καθώς και τις σταθερές C_1, C_2 , οπότε και τη μορφή της συνάρτησης αξίας.

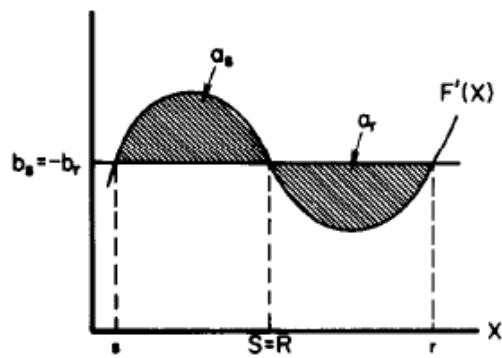
Στα γραφήματα 2.1-2.3 απεικονίζονται οι λύσεις προβλημάτων στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές (πάγια και αναλογικά κόστη προσαρμογής, γράφημα 2.1), singular στοχαστικού ελέγχου (μόνο αναλογικά κόστη, γράφημα 2.2) και στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές (μόνο πάγια κόστη ανά προσαρμογή, γράφημα 2.3).



Γράφημα 2.1 Βέλτιστος έλεγχος με διακριτές προσαρμογές



Γράφημα 2.2 Βέλτιστος singular στοχαστικός έλεγχος



Γράφημα 2.3 Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος μόνο με πάγια κόστη.

3 Ένα μοντέλο μη αναστρέψιμων επενδύσεων με στοχαστικές δυνατότητες παραγωγής και πάγια και αναλογικά κόστη διεκπεραίωσης

3.1 Περιγραφή του προβλήματος και σχετιζόμενη βιβλιογραφία

Σε αυτό το κεφάλαιο εξετάζεται το πρόβλημα μιας εταιρείας που έχει τη δυνατότητα επέκτασης των δυνατοτήτων παραγωγής της μέσω της επένδυσης κεφαλαίων. Οι επενδύσεις κεφαλαίων θεωρούνται μη αναστρέψιμες με την έννοια ότι η εταιρεία δεν μπορεί να ανακτήσει τις επενδύσεις μειώνοντας την ικανότητα παραγωγής της. Η εταιρεία χρεώνεται πάγια και αναλογικά κόστη διεκπεραίωσης σε κάθε της επένδυση και στόχος της είναι η μεγιστοποίηση των κερδών της σε έναν άπειρο χρονικό ορίζοντα.

Οι Dixit και Pindyck [29] παρουσιάζουν μία ανασκόπηση παρόμοιων επενδυτικών προβλημάτων. Οι Davis κ.α. [25] ήταν ανάμεσα στους πρώτους που διατύπωσαν το πρόβλημα του βέλτιστου καθορισμού του χρόνου και του μεγέθους των αυξήσεων της ικανότητας παραγωγής στην παρουσία τυχαίων οικονομικών διακυμάνσεων. Ο Kobila [50] ανέλυσε ένα μοντέλο με ντετερμινιστική ικανότητα παραγωγής σε μία αβέβαιη αγορά χωρίς κόστη διεκπεραίωσης στο αγορασθέν κεφάλαιο. Οι Chiarolla και Hausmann [23] μελέτησαν ένα μη αναστρέψιμο επενδυτικό μοντέλο σε ένα πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα και παρουσίασαν μία αναλυτική λύση για μία συνάρτηση παραγωγής τύπου Cobb Douglas. Άλλες σημαντικές συνεισφορές περιλαμβάνουν τους Oksendal [70], Wang [83] και Bank [6]. Μοντέλα επέκτασης της παραγωγικής ικανότητας στα οποία το εγκατεστημένο επίπεδο μπορεί να μειωθεί αλλά και να αυξηθεί, -τα λεγόμενα αναστρέψιμα μοντέλα επέκτασης ικανότητας- εξετάστηκαν, μεταξύ άλλων, από τους Abel και Eberly [1] και Guo και Pham [39].

Η παρουσία πάγιου κόστους για την προσθήκη κεφαλαίων απαιτεί τεχνικές στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές (ελέγχου στοχαστικής όρμωσης -stochastic impulse control) για τη λύση του προβλήματος. Εδώ υιοθετούμε τη μεθοδολογία που παρουσιάζεται στο άρθρο των Cadenillas και Zapatero [19] (βλέπε επίσης Cadenillas [18], Suzuki και Pliska [77], Cadenillas κ.α [21]). Εναλλακτικά το πρόβλημα θα μπορούσε να προσεγγιστεί μέσω συνδυασμού μεθόδων στοχαστικής ανάλυσης με τεχνικές μη γραμμικού προγραμματισμού όπως στους Alvarez και Virtanen [3] (βλέπε επίσης Alvarez [2], Dayanik και Egami, [28]). Ο Pham [75] έλυσε το πρόβλημα που εξετάζουμε εδώ υποθέτοντας μόνο αναλογικά κόστη ανά επένδυση βασισμένος σε μεθόδους singular στοχαστικού ελέγχου. Η βέλτιστη στρατηγική σε αυτό το μοντέλο

αποτελείται από πολύ μικρές προσθήκες κεφαλαίων ώστε οι δυνατότητες παραγωγής να μην είναι ποτέ μικρότερες από ένα (βέλτιστο) κάτω όριο. Οι επενδύσεις ενδέχεται να είναι άπειρες το πλήθος σε έναν πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα. Με την ύπαρξη πάγιου κόστους ανά επένδυση, τέτοιες στρατηγικές είναι μη βέλτιστες –μπορούν εύκολα να οδηγήσουν σε οικονομική καταστροφή.

Στη δεύτερη ενότητα του κεφαλαίου διατυπώνουμε το πρόβλημα με μαθηματική ορολογία. Στην τρίτη ενότητα παρουσιάζονται κάποια προκαταρκτικά αποτελέσματα σχετικά με τη συνάρτηση αξίας και τις αποδεκτές στρατηγικές επέκτασης δυνατοτήτων παραγωγής. Χαρακτηρίζουμε τη συνάρτηση αξίας ως λύση σε ένα σύστημα qv-ανισοτήτων και λύνουμε αυτό το σύστημα στην τέταρτη ενότητα. Η πέμπτη ενότητα περιλαμβάνει μία αριθμητική εφαρμογή που δείχνει πως η ζώνη στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές συρρικνώνεται στο βέλτιστο σημείο του singular στοχαστικού ελέγχου (όπως προκύπτει από την ανάλυση του Pham [75]) όταν το πάγιο κόστος τείνει στο μηδέν. Επιπλέον δείχνουμε ότι οι βέλτιστες στρατηγικές ελέγχου εξαρτώνται ισχυρά από τον υφαιρετικό ρυθμό (discount rate) του κριτηρίου βελτιστοποίησης.

3.2 Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος

Θεωρούμε έναν χώρο πιθανότητας (Ω, F, P) , σχετιζόμενο με μία μονοδιάστατη κίνηση Brown, W . Θεωρούμε επίσης μία εταιρεία με δυνατότητα παραγωγής K_t η οποία μπορεί να επενδύσει κεφάλαια για να αυξήσει τη δυνατότητα παραγωγής της οποιαδήποτε χρονική στιγμή t αλλά αντιμετωπίζει πάγια και αναλογικά κόστη διεκπεραίωσης που συμβολίζονται με C και c αντίστοιχα. Για αρχικό κεφάλαιο $k \geq 0$ οι δυνατότητες παραγωγής της εταιρίας εξελίσσονται σύμφωνα με την ακόλουθη γενικευμένη εξίσωση του Ito:

$$K_t = k - \int_0^t \delta K_s ds + \int_0^t \gamma K_s dW_s + \sum_{n=1}^{\infty} I_{\{\tau_n < t\}} \xi_n, \quad (3.2.1)$$

όπου $\delta \geq 0$ είναι ο ρυθμός με τον οποίο φθίνει η ικανότητα παραγωγής στο χρόνο όταν δεν υπάρχουν επενδύσεις, το $\gamma > 0$ αντιπροσωπεύει την μεταβλητότητα της και ξ_n είναι το (θετικό) ποσό της n ης επένδυσης. Παρατηρούμε όταν δεν υπάρχει στοχαστικός έλεγχος (μέσω επενδύσεων) η τιμή της συνάρτησης στο τελευταίο μέρος της (3.2.1) είναι μηδέν, οπότε το K περιγράφεται απλά από μία γεωμετρική κίνηση Brown.

Η συνάρτηση κέρδους Π θεωρείται συνεχής στο $\mathbb{R}^+$, μη φθίνουσα, κοίλη και C^1 στο $(0, \infty)$, με $\Pi(0) = 0$ και ικανοποιεί της συνθήκες Inada:

$$\Pi'(0^+) := \lim_{k \downarrow 0} \Pi'(k) = \infty \text{ and } \Pi'(\infty) := \lim_{k \rightarrow \infty} \Pi'(k) = 0. \quad (3.2.2)$$

Ένα τυπικό παράδειγμα που προκύπτει από την συνάρτηση παραγωγής τύπου Cobb-Douglas, οδηγεί σε μία συνάρτηση κέρδους της μορφής:

$$\Pi(k) = \lambda k^\alpha, \quad \text{με } \lambda > 0, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (3.2.3)$$

Στα επόμενα βήματα υιοθετούμε αυτήν την επιλογή για τη συνάρτηση κέρδους όμοια με τους Pham [75] και Merhi και Zervos [63].

Με βάση τα παραπάνω, το πρόβλημα της εταιρείας διατυπώνεται ως εξής:

Πρόβλημα 3.2.1 Η εταιρία σκοπεύει να μεγιστοποιήσει το καθαρό (discounted) κέρδος μείον τα κόστη επενδύσεων σε έναν άπειρο χρονικό ορίζοντα. Συγκεκριμένα η εταιρία σκοπεύει να επιλέξει ένα ζεύγος (T, ξ) το οποίο μεγιστοποιεί το συναρτησοειδές J_1 που ορίζεται από την παρακάτω ισότητα:

$$J_1(k, T, \xi) := E_k \left[\int_0^\infty e^{-rt} \Pi(K_t) dt - \sum_{n=1}^\infty e^{-r\tau_n} ((C + C_1 \xi_n) I_{\{\xi_n > 0\}}) I_{\{\tau_n < \infty\}} \right] \quad (3.2.4)$$

με το r να συμβολίζει τον υφαιρετικό ρυθμό και $C_1 = 1 + c$.

3.3 Βοηθητικά Αποτελέσματα

Αποδεκτές στρατηγικές

Εφόσον θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση J_1 στο πρόβλημα 3.2.1, θα πρέπει να εξετάσουμε μόνο τις στρατηγικές για τις οποίες το J_1 είναι καλώς ορισμένο και πεπερασμένο. Ούτως ώστε να ισχύει ότι η παράσταση

$$E_k \left[\sum_{n=1}^\infty e^{-r\tau_n} (C + C_1 \xi_n) I_{\{\tau_n < \infty\}} \right] \quad (3.3.1)$$

είναι καλώς ορισμένη και πεπερασμένη, είναι απαραίτητο να ισχύουν οι δύο παρακάτω σχέσεις:

$$E \left[\sum_{n=1}^\infty e^{-r\tau_n} I_{\{\tau_n < \infty\}} \right] < \infty \text{ και } E \left[\sum_{n=1}^\infty e^{-r\tau_n} \xi_n I_{\{\tau_n < \infty\}} \right] < \infty. \quad (3.3.2)$$

Για να ισχύει η ανισότητα στο αριστερό μέρος πρέπει να ισχύει:

$$\forall T \in [0, \infty): \quad P\{\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n \leq T\} = 0. \quad (3.3.3)$$

Ενώ για να ισχύει η ανισότητα στο δεξί μέρος πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω δύο σχέσεις

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E[e^{-rT} K(T+)] = 0, \quad (3.3.4)$$

$$E\left[\int_0^\infty e^{-rt} K_t dt\right] < \infty. \quad (3.3.5)$$

Οι τελευταίες δύο συνθήκες συνεπάγονται από τον τύπο της ολοκλήρωσης ανά τμήματα (βλέπε για παράδειγμα το κεφάλαιο VI.38 των Rogers και Williams [79]) σύμφωνα με τον οποίο για κάθε $0 < s \leq t < \infty$,

$$E[e^{-rt} K(t+)] - E[e^{-rs} K(s+)] = -(\delta + \lambda) E\left[\int_s^t e^{-ru} K(u) du\right] + E\left[\sum_{n=1}^\infty e^{-r\tau_n} \xi_n I_{\{s < \tau_n \leq t\}}\right] \quad (3.3.6)$$

Σημειώνουμε επίσης ότι για να ισχύει $E_k \int_0^\infty e^{-rt} \Pi(K_t) dt < \infty$ αρκεί να ισχύει η (3.3.5).

Ορισμός 3.3.1. [Αποδεκτοί έλεγχοι] Θα λέμε ότι ένας στοχαστικός έλεγχος με διακριτές προσαρμογές είναι αποδεκτός εάν ικανοποιούνται οι συνθήκες (3.3.3)-(3.3.5) και δηλώνουμε με $A(k)$ την τάξη των αποδεκτών ελέγχων.

Άνω / Κάτω φράγματα για την συνάρτηση αξίας

Ορίζουμε με V τη συνάρτηση αξίας. Δηλαδή, για κάθε $k \in (0, \infty)$,

$$V(k) := \sup\{J_1(k; T, \xi); (T, \xi) \in A(k)\}. \quad (3.3.7)$$

Στο ακόλουθο λήμμα υπολογίζονται άνω / κάτω φράγματα για την συνάρτηση αξίας τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στην επόμενη ενότητα.

Λήμμα 3.3.1 Η συνάρτηση αξίας V είναι πεπερασμένη και για κάθε $q \in [0, C_1]$ ικανοποιεί:

$$0 \leq V(k) \leq \frac{\tilde{\Pi}((r+\delta)q)}{r} + kq, \quad k \geq 0 \quad (3.3.8)$$

όπου κάτω από τις συνθήκες Inada το

$$\tilde{\Pi}(z) := \sup_{k \geq 0} [\Pi(k) - kz] < \infty, \quad \forall z \geq 0 \quad (3.3.9)$$

ορίζει το μετασχηματισμό Fenchel-Legendre του Π .

Απόδειξη. Για το αριστερό τμήμα της ανισότητας πρέπει απλά να παρατηρήσουμε ότι εφ' όσον η αξία της μη επένδυσης είναι μεγαλύτερη του μηδενός, η συνάρτηση αξίας ανήκει στο $[0, \infty]$. Το δεξί τμήμα της ανισότητας ισχύει για το πρόβλημα singular στοχαστικού ελέγχου (Λήμμα 1.3.2 στον Pham, [75]) και εφ' όσον μπορούμε να θεωρήσουμε το σύνολο των στοχαστικών ελέγχων με διακριτές προσαρμογές ως ένα υποσύνολο του συνόλου των singular στοχαστικών ελέγχων έχουμε

$$V(k) \leq V_s(k) \quad (3.3.10)$$

όπου $V_s(k)$ είναι η συνάρτηση αξίας του προβλήματος singular στοχαστικού ελέγχου. $\square$

Στο παραπάνω λήμμα χρησιμοποιήσαμε μία σχέση μεταξύ προβλημάτων στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές και singular στοχαστικού ελέγχου. Παρόμοια προβλήματα εξετάζονται από τους Menaldi και Robin [60], Menaldi και Rofman [61] και Oksendal [71]; Οι Alvarez και Virtanen [3] έδειξαν για μία κλάση προβλημάτων παρόμοια με αυτή που παρουσιάζουμε εδώ ότι η ανισότητα (3.3.10) ισχύει επίσης για τις παραγώγους των δύο προβλημάτων στοχαστικού ελέγχου.

3.4 Λύση της qv-ανισότητας

Για μία συνάρτηση $\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζουμε τον τελεστή M ως

$$M\phi(k) := \sup \{ \phi(k + \xi) - C - C_1 \xi : \xi \in (0, \infty), k \in (0, \infty) \}. \quad (3.4.1)$$

Το $MV(k)$ αντιπροσωπεύει την αξία της στρατηγικής που αποτελείται από την επιλογή της βέλτιστης άμεσης επένδυσης ενώ στη συνέχεια οι χρόνοι και τα ποσά επένδυσης επιλέγονται βέλτιστα. Θεωρούμε επίσης το διαφορικό τελεστή $\mathfrak{V}$ που ορίζεται ως

$$\mathfrak{I}\psi(k) := \frac{1}{2}\gamma^2 k^2 \frac{d^2\psi(k)}{dk^2} - \delta k \frac{d\psi(k)}{dk} - r\psi(k). \quad (3.4.2)$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, σκοπεύουμε να βρούμε τη συνάρτηση αξίας και τη βέλτιστη στρατηγική.

Έστω ότι υπάρχει μία βέλτιστη στρατηγική για κάθε τιμή της αρχικής επένδυσης. Τότε, εάν η διαδικασία βρίσκεται αρχικά στο k και συνεχίζει ακολουθώντας τη βέλτιστη στρατηγική, η αναμενόμενη ωφέλεια που σχετίζεται με αυτή τη βέλτιστη στρατηγική είναι $V(k)$. Από την άλλη πλευρά, εάν η διαδικασία ξεκινάει από το k , κάνει αμέσως τη βέλτιστη επένδυση, και στη συνέχεια ακολουθεί τη βέλτιστη στρατηγική, η αναμενόμενη ωφέλεια που σχετίζεται με αυτή τη στρατηγική είναι $MV(k)$. Αφού η πρώτη στρατηγική είναι βέλτιστη η αναμενόμενη ωφέλεια που αντιστοιχεί σε αυτή είναι μεγαλύτερη ή ίση από την αναμενόμενη ωφέλεια που σχετίζεται με τη δεύτερη στρατηγική. Επιπλέον, όταν η αναμενόμενη ωφέλεια είναι ίση και στις δύο περιπτώσεις, τότε ο βέλτιστος έλεγχος είναι η παρέμβαση στο στοχαστικό σύστημα μέσω μιας επένδυσης. Δηλαδή ισχύει, $V(k) \geq MV(k)$, και όταν ισχύει η ισότητα είναι βέλτιστο να γίνει επένδυση. Όταν δεν υπάρχει έλεγχος, πρέπει να ισχύει $\mathfrak{I}V(k) = 0$ (από εφαρμογή της αρχής δυναμικού προγραμματισμού στο πρόβλημα που εξετάζουμε). Οι παραπάνω αρχικές παρατηρήσεις μπορούν να εφαρμοστούν για να δοθεί ένας χαρακτηρισμός της συνάρτησης αξίας.

Ορισμός 3.4.1 (qν-ανισότητες): Θα λέμε ότι μια συνάρτηση $v : (0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ ικανοποιεί τις qν-ανισότητες για το πρόβλημα 3.2.1 αν για κάθε $k \in [0, \infty)$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\mathfrak{I}v(k) + \Pi(k) \leq 0, \quad (3.4.3)$$

$$v(k) \geq Mv(k), \quad (3.4.4)$$

$$(v(k) - Mv(k))(\mathfrak{I}v(k) + \Pi(k)) = 0. \quad (3.4.5)$$

Ανισότητες τέτοιου είδους έχουν εξετασθεί, μεταξύ άλλων, από τους Bensoussan και Lions [9], Perthame [73, 74] και Baccarin [5] αλλά το θεωρητικό υπόβαθρο όπως έχει αναπτυχθεί στις παραπάνω εργασίες δεν μπορεί να εφαρμοστεί απ' ευθείας στη δική μας περίπτωση.

Μία λύση v των qν-ανισοτήτων χωρίζει το διάστημα $(0, \infty)$ σε δύο περιοχές: μία περιοχή στην οποία δεν εφαρμόζεται έλεγχος

$$C := \{k \in (0, \infty) : v(k) > Mv(k) \quad \text{και} \quad \mathfrak{I}v(k) + \Pi(k) = 0\}$$

και μία περιοχή στην οποία ο βέλτιστος έλεγχος είναι η επένδυση

$$\Sigma := \{k \in (0, \infty) : v(k) = Mv(k) \quad \text{και} \quad \Im v(k) + \Pi(k) < 0\}.$$

Λύνοντας τις παραπάνω ανισότητες μπορούμε να κατασκευάσουμε τον παρακάτω στοχαστικό έλεγχο.

Ορισμός 3.4.2: Έστω v μία λύση των qv-ανισοτήτων. Ο παρακάτω στοχαστικός έλεγχος

$$(T^v, \xi^v) = (\tau_1^v, \tau_2^v, \dots, \tau_n^v, \dots; \xi_1^v, \xi_2^v, \dots, \xi_n^v, \dots)$$

καλείται qv-έλεγχος σχετιζόμενος με τη v (εφόσον υπάρχει)

$$\begin{aligned} \tau_1^v &:= \inf \{t \geq 0 : v(k^v(t)) = Mv(k^v(t))\} \\ \xi_1^v &:= \arg \sup \{v(k^v(\tau_1^v) + \xi) - C - C_1 \xi : \xi \in \mathfrak{R}^+, k^v(\tau_1^v) + \xi \in \mathfrak{R}^+\} \end{aligned}$$

και για κάθε $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \tau_n^v &:= \inf \{t \geq \tau_{n-1}^v : v(k^v(t)) = Mv(k^v(t))\} \\ \xi_n^v &:= \arg \sup \{v(k^v(\tau_n^v) + \xi) - C - C_1 \xi : \xi \in \mathfrak{R}^+, k^v(\tau_n^v) + \xi \in \mathfrak{R}^+\} \end{aligned}$$

όπου $\tau_0^v := 0$ and $\xi_0^v := 0$.

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι αυξήσεις στις δυνατότητες παραγωγής συμβαίνουν μόνο όταν τα v και Mv είναι ίσα και το μέγεθος της επένδυσης σχετίζεται με τη λύση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης για το $Mv(k)$.

Ο Korn [53] παρουσίασε μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη βέλτιστης λύσης σε προβλήματα στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές και την εφάρμοσε σε διαφορετικές κλάσεις προβλημάτων. Για κάθε πρόβλημα έδειξε ότι ένας αποδεκτός έλεγχος που ικανοποιεί τη σχετική συνθήκη είναι βέλτιστος. Οι Cadenillas και Zapatero [19] και Cadenillas κ.α. [21] εξέλιξαν κατάλληλες (για τα προβλήματα τα οποία εξέτασαν) παραλλαγές του θεωρήματος 3.2 του Korn [53]. Η παρακάτω εκδοχή είναι κατάλληλη για την εφαρμογή που εξετάζουμε σε αυτό το κεφάλαιο. Η απόδειξή της είναι προφανής μέσω των επιχειρημάτων που αναπτύσσονται στα άρθρα των Cadenillas και Zapatero [19] και Cadenillas κ.α. [21]. Παρουσιάζουμε μία απόδειξη στο παράρτημα για ένα παρόμοιο θεώρημα που διατυπώνεται στο επόμενο κεφάλαιο.

Θεώρημα 3.4.1 Έστω $v \in C^1((0, \infty); (0, \infty))$ μία λύση των qv-ανισοτήτων και έστω $b \in (0, \infty)$ τέτοιο ώστε $v \in C^2([0, \infty) - \{b\}; \mathbb{R}^+)$. Έστω επίσης ότι υπάρχει $0 < L < \infty$ τέτοιο ώστε η v να είναι γραμμική συνάρτηση στο διάστημα $(0, L)$. Τότε για κάθε $k \in (0, \infty)$ ισχύει:

$$V(k) \leq v(k).$$

Επιπλέον, αν ο qv-έλεγχος (T^v, ξ^v) που αντιστοιχεί στη v είναι αποδεκτός τότε είναι ένας βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος και για κάθε $k \in (0, \infty)$ ισχύει:

$$V(k) = v(k) = J(k; T^v, \xi^v). \square$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν την ύπαρξη βέλτιστης λύσης (T, ξ) που χαρακτηρίζεται από παραμέτρους L, l με $0 < L < l < \infty$ τέτοιες ώστε η βέλτιστη στρατηγική είναι η παραμονή στην ημιευθεία $[L, \infty)$ και η μετάβαση στο l όταν η διαδικασία βρεθεί στο L . Διατυπώνοντας το παραπάνω με μαθηματικούς όρους ορίζουμε τους (τυχαίους) χρόνους κατά τους οποίους επενδύουμε ως:

$$\tau_i = \inf\{t > \tau_{i-1} : K_t \notin (L, \infty)\} \quad (3.4.6)$$

για κάθε $i \in \mathbb{N}$, και το μέγεθος της επένδυσης ως

$$K_{\tau_{i+}} = K_{\tau_i} + \xi_i = l(I_{X_{\tau_i}=L}). \quad (3.4.7)$$

Με βάση τα παραπάνω η συνάρτηση αξίας ικανοποιεί τη σχέση:

$$\forall y \in (0, L]: \quad V(y) = v(l) - C - C_1(l - y). \quad (3.4.8)$$

Για να είναι η συνάρτηση αξίας διαφορίσιμη στα $\{L, l\}$, μέσω της (3.4.8) παίρνουμε τις παρακάτω σχέσεις:

$$V'(L) = C_1 \quad (3.4.9)$$

και

$$V'(l) = C_1. \quad (3.4.10)$$

Συμπεραίνουμε επίσης ότι η εφόσον η περιοχή στην οποία δε γίνονται επενδύσεις είναι το διάστημα (L, ∞) , θα πρέπει να ισχύει:

$$\forall k \in [L, \infty): \mathfrak{I}v(k) = \frac{1}{2}\gamma^2 k^2 \frac{d^2 v(k)}{dk^2} - \delta k \frac{dv(k)}{dk} - rv(k) + \Pi(k) = 0. \quad (3.4.11)$$

Εφαρμόζοντας κλασσικές μεθόδους επίλυσης συνήθων διαφορικών εξισώσεων, βρίσκουμε τη γενική λύση της (3.4.11) για Π όπως στην (3.2.3) η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$v(k) = Ak^{a_1} + Bk^{a_2} + \tilde{V}_0(k) \quad (3.4.12)$$

όπου A, B είναι άγνωστες σταθερές και

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2\delta + \gamma^2 + (4\delta^2 - 4\delta\gamma^2 + \gamma^4 + 8r\gamma^2)^{1/2}}{2\gamma^2} > 1 \\ a_2 &= \frac{2\delta + \gamma^2 - (4\delta^2 - 4\delta\gamma^2 + \gamma^4 + 8r\gamma^2)^{1/2}}{2\gamma^2} < 0 \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

$$\tilde{V}_0(k) = E \left[\int_0^\infty e^{-rt} \Pi(\tilde{K}_t) dt \right], \quad (3.4.14)$$

και όπου το $\tilde{K}_t$ παριστά τη γεωμετρική κίνηση Brown (3.2.1).

Για Π δοθέν από τη (3.2.3) έχουμε

$$v(k) = Ak^{a_1} + Bk^{a_2} + \frac{\lambda k^a}{\mu r}, \quad (3.4.15)$$

με

$$\mu = 4(\alpha^2 \gamma^2 - 2\delta\alpha - 2\alpha\gamma^2 - 4r). \quad (3.4.16)$$

Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε ότι αν ισχύει $A > 0$ τότε η (3.3.10) δεν ισχύει (βλέπε θεώρημα 1.5.3, Pham [75] για τη μορφή της συνάρτησης αξίας στο σχετιζόμενο πρόβλημα singular στοχαστικού ελέγχου). Επιπλέον για $A < 0$, $v'(k) \rightarrow -\infty$ όταν $k \rightarrow \infty$ που είναι επίσης μη αποδεκτό, οπότε πρέπει να ισχύει $A = 0$.

Σημείωση 3.4.1 Σύμφωνα με την εργασία του Dixit [30], σε προβλήματα στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές όπου δεν υπάρχει λόγος ελέγχου του συστήματος για την αποφυγή υψηλών τιμών –όπως στην περίπτωση μας–, πρέπει να χρησιμοποιηθεί κάποιο οικονομικό επιχείρημα το οποίο θα παρέχει μία -αναγκαία για την εύρεση της συνάρτησης αξίας- συνοριακή συνθήκη για την (3.4.15) όταν το K τείνει στο άπειρο. Σε αυτό το κεφάλαιο χρησιμοποιούμε το ότι η συνάρτηση αξίας του προβλήματος στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές είναι άνω φραγμένη από τη συνάρτηση αξίας του αντίστοιχου προβλήματος singular στοχαστικού ελέγχου. Στη βιβλιογραφία δεν έχουμε συναντήσει καμία εφαρμογή στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές όπου έλεγχος πραγματοποιείται μόνο εφόσον η στοχαστική διαδικασία φτάσει σε κάποιο κάτω όριο. Σε προβλήματα βέλτιστης συγκομιδής ή διανομής μερίσματος συναντάμε το αντίστοιχο πρόβλημα όπου δεν επιτρέπεται σε μία στοχαστική διαδικασία να ξεπεράσει ένα άνω όριο. Για τέτοιου είδους εφαρμογές της θεωρίας, προηγούμενες εργασίες (Cadenillas [18], Cadenillas κ.α. [21]) έθεσαν ως συνοριακή συνθήκη το μηδενισμό της συνάρτησης αξίας σε κάποιο χαμηλό κάτω όριο.

Συμπερασματικά, η λύση στο πρόβλημα αυτού του κεφαλαίου περιγράφεται από τις εξισώσεις (3.4.6), (3.4.7) και οι τρεις άγνωστοι L , l , B επιλύουν ένα σύστημα τριών μη γραμμικών εξισώσεων:

$$h(L) = h(l) - C - C_1(l - L) \quad (3.4.17)$$

$$h'(L) = C_1 \quad (3.4.18)$$

$$h'(l) = C_1 \quad (3.4.19)$$

με

$$h(x) = Bx^{a_2} + \frac{\lambda x^a}{\mu r}. \quad (3.4.20)$$

Τα παραπάνω αποδεικνύονται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.4.2 Έστω L , l με $L < l < \infty$ μια λύση του συστήματος που περιγράφεται από τις (3.4.17)-(3.4.19). Ορίζουμε τη συνάρτηση $V : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ως

$$V(k) := \begin{cases} h(k) & \text{if } L \leq k \\ h(k) - C - C_1(l - k) & \text{if } k < L \end{cases} \quad (3.4.21)$$

Αν για κάθε $k < L$ ισχύει

$$-C_1 \delta k - r[h(l) - C - C_1(l - k)] + \Pi(k) < 0 \quad (3.4.22)$$

τότε η συνάρτηση αξίας του προβλήματος 2.1 δίνεται από τη v . Δηλαδή

$$v(k) = V(k) = \sup\{J_1(k; T, \xi); (T, \xi) \in A(k)\}$$

και η βέλτιστη στρατηγική δίνεται από τις σχέσεις (3.4.6), (3.4.7).

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι αν V είναι μία λύση των qv-ανισοτήτων τότε σύμφωνα με το θεώρημα 3.4.1, η V θα είναι η συνάρτηση αξίας και η βέλτιστη στρατηγική θα δίνεται από τις (3.4.6)-(3.4.7). Πράγματι, η V έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο διάστημα $(0, L) \cup (L, \infty)$ και συνεχή πρώτη παράγωγο στο L . Επιπλέον, η V είναι γραμμική στο διάστημα $(0, L)$ και ο qv-έλεγχος που σχετίζεται με τη V είναι αποδεκτός, γιατί η τροχιά K που σχετίζεται με τον qv-έλεγχο που προέρχεται από τη V συμπεριφέρεται ως γεωμετρική κίνηση Brown σε κάθε τυχαίο διάστημα (τ_n, τ_{n+1}) και ικανοποιεί: $P\{\forall t \in (0, \infty): k_t \in [L, \infty)\} = 1$. Επομένως οι συνθήκες (3.3.3)-(3.3.5) ικανοποιούνται, και ο qv-έλεγχος που σχετίζεται με τη V είναι αποδεκτός. Άρα μένει να επαληθεύσουμε ότι η V επιλύει τις qv-ανισότητες.

Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\mathfrak{I}V(k) + \Pi(k) = \begin{cases} \mathfrak{I}h(k) + \Pi(k) & \alpha\nu \quad L \leq k \\ -C_1 \delta k - r[h(l) - C - C_1(l - k)] + \Pi(k) & \alpha\nu \quad L > k \end{cases}$$

επομένως το $\mathfrak{I}V(k) + \Pi(k)$ ισούται με μηδέν στο διάστημα $[L, \infty)$ και είναι αρνητικό στο διάστημα $(0, L)$ μέσω της συνθήκης (3.4.22), οπότε η ανισότητα (3.4.3) ικανοποιείται. Σημειώνουμε επίσης ότι

$$MV(k) = \begin{cases} h(k) - C & \text{if } L < k \\ h(l) - C - C_1(k - l) & \text{if } k \leq L \end{cases}$$

και παρατηρούμε ότι

$$\forall k \in [L, \infty): \quad v(k) - Mv(k) = C > 0.$$

και

$$\forall k \in (0, L) \quad v(k) - Mv(k) = h(k) - h(l) + C - C_1(l - k),$$

Έτσι η παράσταση $v - Mv$ ισούται με μηδέν στο διάστημα $(0, L)$ και είναι θετική στο $[L, \infty)$, οπότε ικανοποιούνται οι ανισότητες (3.4.3)-(3.4.5). Με

βάση τα παραπάνω η ν αποτελεί λύση των qv-ανισοτήτων και αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. $\square$

3.5 Εφαρμογή

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης του συστήματος (3.4.17)-(3.4.19) και διεξάγουμε ανάλυση ευαισθησίας σε σχέση με τα πάγια κόστη και τον υφαιρετικό ρυθμό μέσω εφαρμογής ενός αλγόριθμου Newton-Raphson. Πρέπει να σημειωθεί ότι το μη γραμμικό σύστημα είναι αρκετά πολύπλοκο οπότε η σύγκλιση του αριθμητικού σχήματος είναι ευαίσθητη σε σχέση με τις αρχικές τιμές που παρέχονται στον αλγόριθμο. Έτσι, βρίσκουμε πρώτα λύσεις για μία βασική περίπτωση και για κάθε μικρή μεταβολή μίας παραμέτρου εισάγουμε ως αρχικές τιμές τα αποτελέσματα της προηγούμενης εκτέλεσης.

Αρχικά σημειώνουμε ότι το σημείο ελέγχου k_b του προβλήματος singular στοχαστικού ελέγχου δίνεται από την παρακάτω σχέση (Pham [75])

$$k_b = \left(\frac{C_1(1-a_2)}{a\theta(a-a_2)} \right)^{\frac{1}{a-1}} \quad (3.5.1)$$

όπου

$$\theta = \frac{1}{r + a\delta + \frac{\gamma^2}{2}a(1-a)} \quad (3.5.2)$$

Θεωρούμε λοιπόν τα παρακάτω δεδομένα

$$C_1 = 1.1 \quad r = 0.2 \quad \lambda = 1 \quad \delta = 0.1 \quad \gamma = 0.3 \quad a = 0.3$$

και παρατηρούμε ότι για τις παραπάνω τιμές, $k_b=1.3602$. Ο πίνακας 3.1 και το γράφημα 3.1 δείχνουν το πώς μεταβάλλεται το διάστημα ελέγχου (L, l) για διαφορετικές τιμές στα πάγια κόστη C . Παρατηρούμε ότι το διάστημα ελέγχου συρρικνώνεται προς το όριο ελέγχου του αντίστοιχου singular στοχαστικού ελέγχου για φθίνουσες τιμές του C . Η ευθεία παλινδρόμησης (η οποία εφαρμόζει τέλεια, $R^2=1$) για το πλάτος $l-L$ του διαστήματος ελέγχου δοσμένο ως συνάρτηση του πάγιου κόστους δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$(l-L)^{3.1} = 6.822 \cdot C - 4.24 \cdot C^2 + 1.6 \cdot C^3 \quad (3.5.3)$$

όπου ο εκθέτης στην (3.5.3) προέκυψε μέσω μιας διαδικασίας εύρεσης βέλτιστου μετασχηματισμού τύπου Box-Cox.

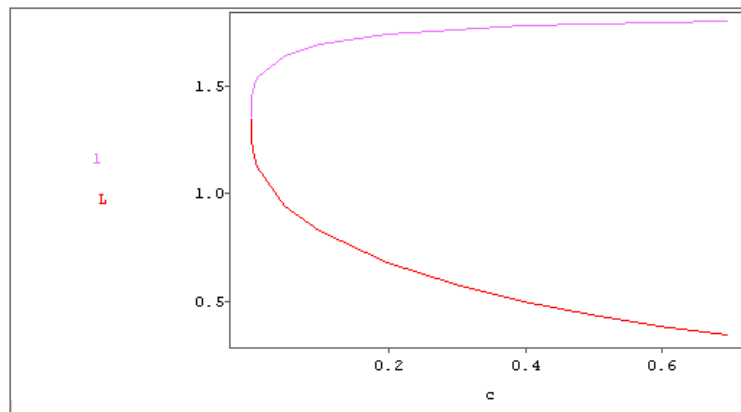
Στη συνέχεια το C μένει σταθερό και ίσο με 0.5 και οι εξισώσεις (3.4.17)-(3.4.19) λύνονται για διαφορετικές τιμές του r (από 0.05 ως 0.2). Ο πίνακας 3.2 και το γράφημα 3.2 δείχνουν ότι τα l και L φθίνουν όσο αυξάνει το r και το ίδιο ισχύει για το εύρος $l-L$ του διαστήματος ελέγχου. Σε αυτή την περίπτωση η ευθεία παλινδρόμησης (που και σε αυτήν την περίπτωση εφαρμόζει τέλεια στα δεδομένα) για το εύρος του διαστήματος ελέγχου δίνεται από τη σχέση

$$(l - L)^{-2.1} = 0.0033 - 0.38 \cdot r + 9.03 \cdot r^2 + 30.19 \cdot r^3 \quad (3.5.4)$$

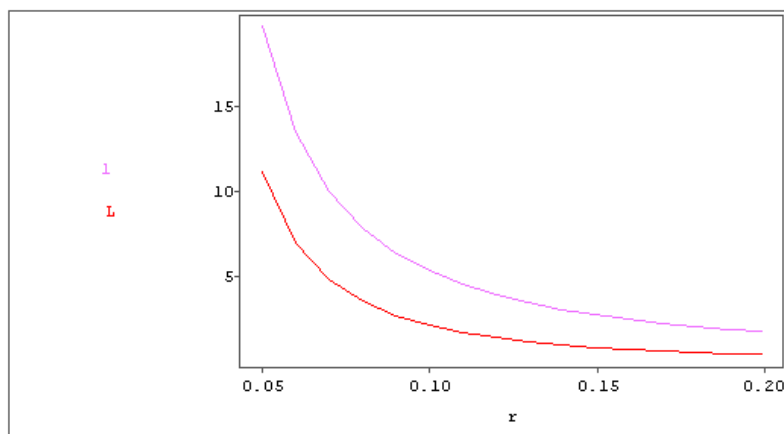
όπου ο εκθέτης στο αριστερό μέλος προέκυψε και εδώ μέσω μιας διαδικασίας Box-Cox.

Πίνακας 3.1 Διαστήματα ελέγχου για διαφορετικά πάγια κόστη.

C	L	l	B
0.7	0.3460	1.8079	0.0151
0.6	0.3913	1.8036	0.0213
0.5	0.4443	1.7972	0.0301
0.4	0.5075	1.7878	0.0428
0.3	0.5851	1.7731	0.0618
0.2	0.6858	1.7486	0.0913
0.1	0.8326	1.7005	0.1420
0.05	0.9491	1.6506	0.1852
0.01	1.1297	1.5483	0.2466
0.005	1.1800	1.5136	0.2602
0.001	1.2576	1.4536	0.2762
0.0005	1.2795	1.4351	0.2794
0.0001	1.3136	1.4048	0.2830
0.00005	1.3234	1.3957	0.2837
0.00001	1.3388	1.3811	0.2845
0.000005	1.3433	1.3768	0.2846
0.000001	1.3503	1.37	0.2848



Γράφημα 3.1 Διαστήματα ελέγχου για διαφορετικά πάγια κόστη.



Γράφημα 3.2 Διαστήματα ελέγχου για διαφορετικά επίπεδα του υφαιρετικού ρυθμού.

Πίνακας 3.2 Διαστήματα ελέγχου για διαφορετικά επίπεδα του υφαιρετικού ρυθμού.

r	L	l	B
0.2	0.4443	1.7972	0.0301
0.19	0.5045	1.9456	0.0489
0.18	0.5753	2.1157	0.0798
0.17	0.6594	2.3124	0.1311
0.16	0.7602	2.5418	0.2169
0.15	0.8826	2.8125	0.3623
0.14	1.033	3.1357	0.6122
0.13	1.2208	3.5275	1.0501
0.12	1.4599	4.0107	1.8355
0.11	1.7711	4.6196	3.2866
0.1	2.1876	5.4071	6.0713
0.09	2.7651	6.4597	11.6893
0.08	3.6033	7.9285	23.8134
0.07	4.897	10.1005	52.5682
0.06	7.0769	13.5903	130.9941
0.05	11.2807	19.9644	398.7536

4 Στοχαστικός έλεγχος με διακριτές προσαρμογές και υφαιρετικά ή εργοδικά κριτήρια βελτιστοποίησης: Μία συγκριτική εφαρμογή στον έλεγχο χαρτοφυλακίου

4.1 Περιγραφή του προβλήματος και σχετιζόμενη βιβλιογραφία

Η πρωταρχικός στόχος σε αυτό το κεφάλαιο είναι να συγκριθούν οι βέλτιστες στρατηγικές όπως προκύπτουν σε ένα πρόβλημα στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές υιοθετώντας εργοδικά ή υφαιρετικά κριτήρια βελτιστοποίησης. Υιοθετώντας ένα εργοδικό κριτήριο, μεγιστοποιούμε τα αναμενόμενα κέρδη (αντίστοιχα ελαχιστοποιούμε τις αναμενόμενες απώλειες) ανά μονάδα χρόνου ενώ υιοθετώντας ένα υφαιρετικό κριτήριο μεγιστοποιούμε τα αναμενόμενα καθαρά / υφαιρετικά κέρδη (αντίστοιχα ελαχιστοποιούμε τις αναμενόμενες υφαιρετικές απώλειες) σε έναν άπειρο χρονικό ορίζοντα. Εξ' όσων γνωρίζουμε αυτή είναι η πρώτη ερευνητική προσπάθεια που διερευνά το συγκεκριμένο πρόβλημα. Στη διεθνή βιβλιογραφία έχουν παρουσιαστεί επιλύσεις προβλημάτων στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές μόνο με υφαιρετικά κριτήρια. Υπάρχουν παρ' όλα αυτά εφαρμογές (όπως το πρόβλημα ελέγχου μιας συναλλαγματικής ισοτιμίας, Jack και Zervos [41]) στις οποίες η επιλογή ενός υφαιρετικού κριτηρίου δεν έχει οικονομικό νόημα και είναι προτιμότερο ένα εργοδικό κριτήριο. Επιπλέον, σε σχέση με εργασίες που παρουσιάζουν αναλύσεις ευαισθησίας για το υφαιρετικό πρόβλημα (π.χ. Cadenillas και Zapatero [19], Suzuki και Pliska [77]), αυτή είναι η πρώτη φορά που δίνεται έμφαση στη μεταβολή των διαστημάτων ελέγχου σε σχέση με τις αλλαγές στα επίπεδα της υφαιρετικής σταθεράς.

Ως μέσο για τη διεξαγωγή της σύγκρισης χρησιμοποιούμε το παρακάτω πρόβλημα που εξ' όσων γνωρίζουμε παρουσιάζεται για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία: Ένας επενδυτής υιοθετεί κριτήρια βελτιστοποίησης τα οποία υπό τις συνήθεις υποθέσεις για την κίνηση της αγοράς (αποδόσεις που ακολουθούν γεωμετρική κίνηση Brown, ανέξοδες συναλλαγές) τον οδηγούν στην απόφαση ότι πρέπει να τοποθετήσει ένα συγκεκριμένο ποσό χ σε μία μετοχή¹. Στην πράξη, εφόσον πρέπει να αντιμετωπίσει –αναλογικά και πάγια- κόστη σε κάθε του συναλλαγή, δεν μπορεί να ακολουθήσει αυτή ακριβώς τη στρατηγική. Για την υλοποίηση της στρατηγικής του επιλέγει ένα διάστημα ελέγχου (L, U) με $L < \chi < U$ μέσα στην οποία επιτρέπει η επένδυσή του να μεταβάλλεται χωρίς ο ίδιος να επεμβαίνει. Όταν η επένδυσή του φτάσει στο U αποταμιεύει το ποσό $U - \chi$ και φέρνει την

¹ Τέτοιες στρατηγικές αποδεικνύονται βέλτιστες υπό τις συνήθεις υποθέσεις για τις συνθήκες της αγοράς όταν ο επενδυτής υιοθετεί εκθετική συνάρτηση ωφέλειας (Merton [66]).

επένδυσή του πάλι στο χ . Αντίστοιχα όταν το ποσό της επένδυσής του πέσει στο κάτω όριο L , ενισχύει την επένδυσή του με ποσό $L-\chi$ για να φτάσει ξανά στο επίπεδο χ . Τα U και L επιλέγονται τέτοια ώστε οι αποταμιεύσεις να μεγιστοποιούν μία συνάρτηση ωφέλειας και οι επιπλέον επενδύσεις να ελαχιστοποιούν μια ενδεχομένως διαφορετική συνάρτηση ωφέλειας.

Όμοια με τη συντριπτική πλειοψηφία της σχετιζόμενης βιβλιογραφίας, υποθέτουμε ότι οι αποδόσεις της μετοχής περιγράφονται από μία γεωμετρική κίνηση Brown. Επιπλέον, για να μη γίνει το πρόβλημα πολύ σύνθετο δεν υποθέτουμε την ύπαρξη άνω ορίου όσον αφορά το μέγιστο των (αθροιστικών) επιπλέον επενδύσεων. Εφόσον λαμβάνουμε υπόψη τα πάγια και αναλογικά κόστη διεκπεραίωσης της συναλλαγής, η εύρεση της βέλτιστης στρατηγικής επαφίεται σε μεθόδους στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές. Ένα άμεσα σχετιζόμενο πρόβλημα αφορά την εύρεση διαστημάτων ελέγχου των επενδυτικών αναλογιών σε διαφορετικές κλάσεις κινδύνου (Suzuki και Pliska [77], Tamoura [82], Kamarianakis και Xerapadeas [45]).

Το κεφάλαιο είναι οργανωμένο ως εξής: Στη δεύτερη ενότητα διατυπώνουμε το μοντέλο με μαθηματικούς όρους και παρουσιάζουμε τα εναλλακτικά εργοδικά / υφαιρετικά κριτήρια βελτιστοποίησης. Στην τρίτη ενότητα παρουσιάζουμε τη λύση του εργοδικού προβλήματος με συνδυασμό μεθόδων στοχαστικού λογισμού και τεχνικών μη γραμμικής βελτιστοποίησης. Πρόσφατα οι Jack και Zervos [41] παρουσίασαν μία μέθοδο επίλυσης παρόμοιων προβλημάτων κάτω από υποθέσεις αρκετά περιοριστικές που δεν ικανοποιούνται για το παράδειγμά μας. Η μεθοδολογία που παρουσιάζεται εδώ είναι πιο απαιτητική σε υπολογισμούς και βασίζεται στις ιδέες που παρουσίασαν οι Karlin και Taylor [49] για την επίλυση ενός απλού εργοδικού προβλήματος². Στην τέταρτη ενότητα επιλύεται το υφαιρετικό πρόβλημα το οποίο περιγράφεται από τις λεγόμενες qn-ανισότητες. Στην πέμπτη ενότητα γίνεται συγκριτική ανάλυση ευαισθησίας των βέλτιστων στρατηγικών όπως προκύπτουν με τα δύο κριτήρια. Τα αποτελέσματά μας υποδεικνύουν γραμμική εξάρτηση του κάτω ορίου του διαστήματος ελέγχου σε σχέση με τον υφαιρετικό ρυθμό. Διαπιστώνουμε επιπλέον σημαντικές διαφορές στις βέλτιστες στρατηγικές που προκύπτουν με υφαιρετικά ή εργοδικά κριτήρια. Το μέγεθός τους μεταβάλλεται με τις παραμέτρους που ορίζουν τα χαρακτηριστικά της

² Οι Karlin και Taylor εξέτασαν ένα πρόβλημα διαχείρισης ρευστών κεφαλαίων των οποίων η εξέλιξη στο χρόνο θεωρήθηκε ότι περιγράφεται ικανοποιητικά από μία κίνηση Brown. Το σχετικά απλό υπόβαθρο του προβλήματος, τους επέτρεψε να διατυπώσουν αναλυτικές λύσεις για τα σύνορα του διαστήματος ελέγχου και το σημείο επαναφοράς στο εσωτερικό του διαστήματος. Για πιο σύνθετες στοχαστικές διαδικασίες –π.χ. γεωμετρική κίνηση Brown- η προσέγγιση που ακολούθησαν είναι πολύ απαιτητική σε υπολογισμούς και είναι αδύνατη η εύρεση αναλυτικών εκφράσεων για τις βέλτιστες στρατηγικές. Σε αυτό το κεφάλαιο χρησιμοποιούμε αριθμητικές μεθόδους μη γραμμικής βελτιστοποίησης. Εξ' όσων γνωρίζουμε η παρούσα είναι η πρώτη προσπάθεια χρησιμοποίησης της μεθόδου των Karlin και Taylor για τη λύση ενός σύνθετου εργοδικού προβλήματος.

αγοράς και του επενδυτή. Για τις τιμές του υφαιρετικού ρυθμού που εξετάζονται στην εφαρμογή, ο επενδυτής που υιοθετεί ένα εργοδικό κριτήριο ακολουθεί βέλτιστες στρατηγικές που παρουσιάζουν μικρότερη αποστροφή στον κίνδυνο.

4.2 Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος

Θεωρούμε έναν χώρο πιθανότητας (Ω, F, P) , σχετιζόμενο με μία μονοδιάστατη κίνηση Brown, W . Η υπό έλεγχο μεταβλητή είναι το σύνολο των αβέβαιων επενδύσεων μίας εταιρείας ή ενός ιδιώτη, τα οποία υπό την απουσία επεμβάσεων θεωρούμε ότι περιγράφονται από μία γεωμετρική κίνηση Brown. Αν ληφθούν υπόψη οι ενδεχόμενες επεμβάσεις, οι αβέβαιες επενδύσεις, έστω X , περιγράφονται από την παρακάτω γενικευμένη εξίσωση Ito

$$X_t = \chi + \int_0^t \mu X_s ds + \int_0^t \sigma X_s dW_s - \sum_{n=1}^{\infty} I_{\{\tau_n < t\}} \xi_n, \quad (4.2.1)$$

όπου μ είναι μία μη αρνητική σταθερά που αντιπροσωπεύει τις αναμενόμενες αποδόσεις, το σ^2 σχετίζεται με τη μεταβλητότητα της στοχαστική διαδικασίας (όπου σ θετικό), το ξ_n αντιστοιχεί στο μέγεθος της n ης επέμβασης και το χ αναπαριστά το αρχικό ποσό επένδυσης το οποίο είναι θετικό και για απλότητα το θεωρούμε ίσο με το ποσό που έχει οριστεί ως στόχος από τον επενδυτή. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η αναμενόμενη τιμή του $X(t)$ δίνεται από τη σχέση

$$EX(t) = \chi \exp(\mu t), \quad (4.2.2)$$

ενώ η διασπορά του είναι

$$VarX(t) = \chi^2 \exp(2\mu t) (\exp(2\sigma^2 t) - 1) \quad (4.2.3)$$

και παρατηρούμε ότι ενώ η αναμενόμενη τιμή του $X(t)$ στη σχέση (4.2.2) αυξάνει με εκθετικό ρυθμό, η τυπική του απόκλιση (τετραγωνική ρίζα της 4.2.3) αυξάνει ακόμα γρηγορότερα.

Για τον ορισμό του κριτηρίου βελτιστοποίησης και του κόστους συναλλαγής, θεωρούμε τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$g_1(\xi) := -K_1 + \frac{1}{\gamma_1} (k_1 \xi)^{\gamma_1} I_{\{\xi > 0\}}, \quad g_2(\xi) := -K_2 - \frac{1}{\gamma_2} (k_2 \xi)^{\gamma_2} I_{\{\xi < 0\}} \quad (4.2.4)$$

όπου το ξ αναπαριστά το μέγεθος παρέμβασης, τα K_1 και K_2 είναι θετικές σταθερές που αντιπροσωπεύουν τα πάγια κόστη συναλλαγής (ανεξάρτητα από το μέγεθός της), το κ_1 αντιπροσωπεύει αναλογικά κόστη για επαναφορά της επένδυσης από το σημείο $\chi + \xi > \chi$ στο χ και ισχύει $k_1 = 1 - \kappa_1$, το κ_2 αντιπροσωπεύει αναλογικά κόστη για επαναφορά της επένδυσης από το $\chi + \xi < \chi$ στο χ και ισχύει $k_2 = 1 + \kappa_2$, και $\gamma_1, \gamma_2 \in (0, 1]$. Μέσω της (4.2.4) έχουμε διαφορετικές συναρτήσεις ωφέλειας για τις αποταμιεύσεις και τις επιπλέον επενδύσεις και διαφορετικά κόστη ανάλογα με τη μορφή παρέμβασης στην επένδυση. Παρόμοια κριτήρια διατυπώθηκαν από τους Cadenillas κ.α. [21, 22] για ένα πρόβλημα βέλτιστης διανομής μερίσματος. Λόγω της ύπαρξης πάγιου κόστους ανά συναλλαγή αρκεί να θεωρήσουμε στρατηγικές της μορφής $\{(\tau_n, \xi_n)\}$, όπου τ_n ο χρόνος που πραγματοποιείται η n -ή συναλλαγή και ξ_n το μέγεθός της. Τα ζεύγη $\{(\tau_n, \xi_n)\}$ πρέπει να ικανοποιούν κάποιες τεχνικές προϋποθέσεις: τα τ_n είναι stopping times, $\tau_n < \tau_{n+1}$, $\tau_n \rightarrow \infty$ για $n \rightarrow \infty$, και τα ξ_n είναι F_{τ_n} -μετρήσιμα.

Για να διατυπώσουμε το εργοδικό πρόβλημα θεωρούμε U και L σταθερές, με $-\infty < L < U < \infty$, και θέτουμε $T(s) = T_s$ να συμβολίζει τη χρονική στιγμή που η στοχαστική διαδικασία X φτάνει στο σημείο s . Συμβολίζουμε επίσης ως:

$$T^* = T_{U,L} = \min\{T(U), T(L)\} = T(U) \wedge T(L) \quad (4.2.5)$$

την πρώτη χρονική στιγμή που η στοχαστική διαδικασία που αντιστοιχεί στο ποσό της επένδυσης φτάνει στο U ή στο L και ορίζουμε τις παρακάτω ποσότητες για τη X :

$$v_1(x) = \Pr\{T(U) < T(L) | X(0) = x\} \quad L < x < U, \quad (4.2.6)$$

είναι η πιθανότητα η διαδικασία να φτάσει το U πριν το L ξεκινώντας από το x , και

$$v_2(x) = E[T^* | X(0) = x], \quad L < x < U, \quad (4.2.7)$$

είναι ο μέσος χρόνος να φτάσει στο U ή στο L ξεκινώντας από το x . Τώρα μπορούμε να διατυπώσουμε το εργοδικό πρόβλημα ως εξής:

Πρόβλημα 4.2.1 Ο επενδυτής επιθυμεί να μεγιστοποιήσει τα κέρδη του ανά μονάδα χρόνου. Πιο συγκεκριμένα, ο επενδυτής επιθυμεί να βρει το βέλτιστο ζεύγος (T, ξ) , που μεγιστοποιεί την παρακάτω παράσταση:

$$J_1(\chi, T, \xi) = z(\chi, L, U) = \frac{f(\chi, L, U)}{v_2(\chi)} \quad (4.2.8)$$

με τον αριθμητή στην (4.2.8) να ορίζεται ως

$$f(\chi, L, U) = v_1(\chi)g_1(U - \chi) + (1 - v_1(\chi))g_2(L - \chi). \quad (4.2.9)$$

Θεωρούμε έναν επενδυτικό κύκλο ο οποίος ξεκινά από το χ και τελειώνει τη στιγμή που το ποσό επένδυσης επιστρέφει στο χ είτε από το U είτε από το L . Ο αριθμητής σταθμίζει τα αναμενόμενα κέρδη και τις αναμενόμενες απώλειες -όπως αυτά εκφράζονται μέσω των συναρτήσεων ωφέλειας στην (4.2.4)- με τις πιθανότητες η επένδυση να φτάσει πρώτα στο άνω ή στο κάτω όριο του διαστήματος ελέγχου κατά τη διάρκεια ενός επενδυτικού κύκλου. Ο παρανομαστής εκφράζει την αναμενόμενη διάρκεια ενός επενδυτικού κύκλου.

Στη συνέχεια διατυπώνουμε το αντίστοιχο υφαιρετικό πρόβλημα.

Πρόβλημα 4.2.2 Ο επενδυτής επιθυμεί να μεγιστοποιήσει τα καθαρά κέρδη του σε έναν άπειρο χρονικό ορίζοντα. Πιο συγκεκριμένα ο επενδυτής επιθυμεί να βρει το βέλτιστο ζεύγος (T, ξ) που μεγιστοποιεί το συναρτησοειδές J_2 το οποίο ορίζεται ως:

$$J_2(x, T, \xi) := E_x \left[\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda \tau_n} (g_1(\xi_n) I_{\{\xi_n > 0\}} + g_2(-\xi_n) I_{\{\xi_n < 0\}}) \mathbf{1}_{\{\tau_n < \infty\}} \right] \quad (4.2.10)$$

όπου το λ αντιπροσωπεύει τον υφαιρετικό ρυθμό και τα g_1, g_2 ορίζονται στην (4.2.4).

4.3 Λύση του εργοδικού προβλήματος

Για τη λύση του προβλήματος (4.2.1) χρησιμοποιούμε μεθόδους στοχαστικού λογισμού όπως παρουσιάζονται στους Karlin και Taylor, [49] και Borodin και Salminen, [14]. Όπως και σε προβλήματα στοχαστικού ελέγχου με υφαιρετικά κριτήρια βελτιστοποίησης, η εύρεση βέλτιστων στρατηγικών επαφίεται τελικά στη λύση ενός συστήματος μη γραμμικών εξισώσεων. Δυστυχώς οι εξισώσεις που προκύπτουν στην περίπτωση μας είναι σημαντικά πιο σύνθετες σε σχέση με αυτές που έχουν παρουσιαστεί στη βιβλιογραφία. Παρ' όλα αυτά, η διατύπωσή τους είναι εφικτή με χρήση λογισμικού που πραγματοποιεί συμβολικούς υπολογισμούς (εδώ

χρησιμοποιήθηκε το Symbolic Math Toolbox της MATLAB) και να βρει τη λύση τους μέσω λογισμικού που εφαρμόζει αλγορίθμους τύπου Newton-Raphson.

Για τον υπολογισμό του αριθμητή και του παρανομαστή στην (4.2.8) επισημαίνουμε ότι τα v_1 και v_2 στις (4.2.6) και (4.2.7) πρέπει να ικανοποιούν τις παρακάτω συνήθεις διαφορικές εξισώσεις:

$$\mu x \frac{dv_1}{dx} + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{d^2 v_1}{dx^2} = 0 \text{ για } L < x < U, \quad v_1(L) = 0, \quad v_1(U) = 1; \quad (4.3.1)$$

και

$$\mu x \frac{dv_2}{dx} + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{d^2 v_2}{dx^2} = -1 \text{ για } L < x < U, \quad v_2(L) = v_2(U) = 0. \quad (4.3.2)$$

Για τη διατύπωση των λύσεων στις παραπάνω εξισώσεις θεωρούμε τη συνάρτηση κλίμακας για τη στοχαστική διαδικασία X η οποία ορίζεται ως

$$S(x) = \int^x s(t) dt, \quad (4.3.3)$$

όπου

$$s(x) = \exp \left\{ - \int^x \left[\frac{2\mu}{\sigma^2 t} \right] dt \right\}. \quad (4.3.4)$$

Ορίζουμε επίσης την παρακάτω συνάρτηση που θα φανεί χρήσιμη σε επόμενα βήματα

$$m(x) = \frac{1}{\sigma^2 x^2 s(x)}. \quad (4.3.5)$$

Με χρήση των παραπάνω σχέσεων η λύση της (4.3.1) διατυπώνεται ως

$$v_1(x) = \frac{S(x) - S(L)}{S(U) - S(L)} \text{ for } L \leq x \leq U, \quad (4.3.6)$$

και η λύση της (4.3.2) διατυπώνεται όπως φαίνεται στην (4.3.7)

$$v_2(x) = 2 \left\{ v_1(x) \int_x^U [S(U) - S(t)] m(t) dt + [1 - v_1(x)] \int_L^x [S(t) - S(L)] m(t) dt \right\}. \quad (4.3.7)$$

Για τη γεωμετρική κίνηση Brown (4.2.1) οι (4.3.3) και (4.5.5) διατυπώνονται ως:

$$S(x) = \frac{x^{1-a}}{1-a} \quad (4.3.8)$$

και

$$m(x) = \frac{x^{a-2}}{\sigma^2} \quad (4.3.9)$$

όπου

$$a = \frac{2\mu}{\sigma^2}. \quad (4.3.10)$$

Με χρήση των παραπάνω βρίσκουμε τα αναμενόμενα κέρδη κατά τη διάρκεια ενός επενδυτικού κύκλου αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.3.6) και (4.3.8) στην (4.2.9). Τα αναμενόμενα κέρδη αποτελούνται από δύο συνθετικά: το κέρδος U - χ (εκφρασμένο μέσω της συνάρτησης ωφέλειας g_1), σταθμισμένο με την πιθανότητα η X να φτάσει πρώτα στο U και όχι στο L ξεκινώντας από το χ , και το κόστος χ - L (εκφρασμένο μέσω της συνάρτησης ωφέλειας g_2) σταθμισμένο με την πιθανότητα η X να φτάσει πρώτα στο L ξεκινώντας από το χ . Για τον αναμενόμενο χρόνο ενός επενδυτικού κύκλου, χρησιμοποιώντας τις (4.3.7)-(4.3.10), παίρνουμε την παρακάτω έκφραση:

$$v_2(x) = 2 \frac{x \log(x)(U^a L - UL^a) + U^a \log(U)(L^a x^{-a-2} - Lx) + L^a \log(L)(Ux - U^a x^{-a-2})}{x(UL^a - U^a L)(a-1)\sigma^2} \quad (4.3.11)$$

Για την εύρεση του ζεύγους (L, U) που μεγιστοποιεί την παράσταση (4.2.8), χρησιμοποιώντας κλασσικές μεθόδους, πρέπει να υπολογιστούν οι παράγωγοι της z , να βρεθούν τα ζεύγη (L, U) που κάνουν αυτό το σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων να μηδενίζεται και να επιλεγούν ως πιθανές λύσεις τα ζεύγη για τα οποία η Εσσιανή του συστήματος είναι αρνητικά ορισμένη³. Οι εκφράσεις για τις δεύτερες παραγώγους του συστήματος είναι ιδιαίτερα μεγάλες και δεν τις παρουσιάζουμε εδώ. Οι πρώτες παράγωγοι της z στην (4.2.8) σε σχέση με τα U και L διατυπώνονται ως εξής:

$$\frac{dz}{dU} = \frac{A_1 - A_2 A_3 A_4}{A_5} \quad (4.3.12)$$

και

$$\frac{dz}{dL} = \frac{A'_1 - A_2 A'_3 A'_4}{A_5} \quad (4.3.13)$$

³ Εναλλακτικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν αλγόριθμοι μη γραμμικής βελτιστοποίησης που δεν υπολογίζουν παραγώγους. Ακολουθούμε αυτή τη μέθοδο σε ένα παρόμοιο πρόβλημα στο επόμενο κεφάλαιο.

με

$$A_1 = v_1(x) \left(\frac{k_1^{\gamma_1} (U-x)^{\gamma_1}}{(U-x)} - \frac{U^{-a} (g_1(U-x) - g_2(x-L))}{S(U) - S(L)} \right) \quad (4.3.14)$$

$$A_1' = (1-v_1(x)) \left(\frac{k_2^{\gamma_2} (x-L)^{\gamma_2}}{(x-L)} - \frac{L^{-a} (g_1(U-x) - g_2(x-L))}{S(U) - S(L)} \right) \quad (4.3.15)$$

$$A_2 = (v_1(x)g_1(U-x) + (1-v_1(x))g_2(x-L)) \quad (4.3.16)$$

$$A_3 = \frac{-A_6}{(S(U) - S(L))x} + \frac{2\mu(\log(U) - \log(x))(a-1) - \sigma^2}{U} + U^{-2a} x^{-2a+1} \sigma - \frac{aA_6}{U^{-2a+1}x} - \frac{A_7 U^{-2a}}{(S(U) - S(L))L^{-2a}x} \quad (4.3.17)$$

$$A_3' = \frac{-A_7}{(S(U) - S(L))x} + \frac{2\mu(\log(x) - \log(L))(a-1) - \sigma^2}{L} + L^{-2a} x^{-2a+1} \sigma - \frac{aA_7}{L^{-2a+1}x} - \frac{A_6 L^{-2a}}{(S(U) - S(L))U^{-2a}x} \quad (4.3.18)$$

$$A_4 = \frac{2v_1(x)}{(2\mu - \sigma^2)^2} \quad (4.3.19)$$

$$A_4' = \frac{2(1-v_1(x))}{(2\mu - \sigma^2)^2} \quad (4.3.20)$$

$$A_5 = 2 \left(\frac{v_1(x)A_6}{(2\mu - \sigma^2)^2 U^{-2a}x} - \frac{(1-v_1(x))A_7}{(2\mu - \sigma^2)^2 L^{-2a}x} \right) \quad (4.3.21)$$

$$A_6 = xU^{-2a} (2\mu(\log(U) - \log(x)) - \sigma^2(\log(U) - \log(x)) - \sigma^2) + Ux^{-2a} \sigma^2 \quad (4.3.22)$$

$$A_7 = xL^{-2a} (2\mu(\log(x) - \log(L)) - \sigma^2(\log(x) - \log(L)) - \sigma^2) - Lx^{-2a} \sigma^2. \quad (4.3.23)$$

Οι παράγωγοι σχηματίζουν ένα σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων που μπορούν να λυθούν με αλγορίθμους αριθμητικής προσέγγισης τύπου Newton-Raphson. Παρουσιάζουμε αποτελέσματα με χρήση τέτοιων

αλγορίθμων στην πέμπτη ενότητα. Η μέθοδος αυτής της ενότητας είναι απαιτητική όσον αφορά το πλήθος των υπολογισμών, μπορεί όμως με εύκολο τρόπο να χειριστεί προβλήματα με περιορισμούς (π.χ. με χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange).

4.4 Λύση του υφαιρετικού προβλήματος

Σε αυτή την ενότητα το πρόβλημα στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές διατυπώνεται ως ένα σύστημα qn-ανισοτήτων, παρόμοια με την εργασία των Cadenillas κ.α. [21].

Αποδεκτές στρατηγικές

Για να μεγιστοποιήσουμε το συναρτησοειδές J_2 στο πρόβλημα 4.2.2 πρέπει να θεωρήσουμε μόνο τις στρατηγικές για τις οποίες το J_2 είναι καλά ορισμένο και πεπερασμένο. Για να ισχύει ότι η παράσταση

$$E_x \left[\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda \tau_n} (g_1(\xi_n) I_{\{\xi_n > 0\}} + g_2(-\xi_n) I_{\{\xi_n < 0\}}) I_{\{\tau_n < \infty\}} \right] \quad (4.4.1)$$

είναι καλώς ορισμένη και πεπερασμένη πρέπει να ισχύει

$$E \left[\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda \tau_n} I_{\{\tau_n < \infty\}} \right] < \infty \text{ και } E \left[\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda \tau_n} |\xi_n| I_{\{\tau_n < \infty\}} \right] < \infty. \quad (4.4.2)$$

Για την ανισότητα στο αριστερό μέρος μας αρκεί να ισχύει

$$\forall T \in [0, \infty): \quad P \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n \leq T \right\} = 0. \quad (4.4.3)$$

Για να πάρουμε την ανισότητα στο δεξί μέρος της (4.4.2) πρέπει να ισχύει

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E[e^{-\lambda T} X(T+)] = 0 \quad (4.4.4)$$

και

$$E \left[\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} X(t) dt \right] < \infty. \quad (4.4.5)$$

Οι τελευταίες δύο συνθήκες συνεπάγονται από τον τύπο της ολοκλήρωσης κατά μέρη (ενότητα VI.38, Rogers και Williams [79]). Με βάση αυτήν για κάθε $0 < s \leq t < \infty$, ισχύει

$$E[e^{-\lambda t} X(t+)] - E[e^{-\lambda s} X(s+)] = (\mu - \lambda) E\left[\int_s^t e^{-\lambda u} X(u) du\right] + E\left[\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda \tau_n} \xi_n I_{\{s < \tau_n \leq t\}}\right]. \quad (4.4.6)$$

Ορισμός 4.4.1 [Αποδεκτοί έλεγχοι]. Θα λέμε ότι ένας έλεγχος είναι αποδεκτός αν ικανοποιεί τις συνθήκες (4.4.3)-(4.4.5) και θα συμβολίζουμε με $A(x)$ την κλάση των αποδεκτών ελέγχων.

H συνάρτηση αξίας

Συμβολίζουμε με V τη συνάρτηση αξίας. Δηλαδή, για κάθε $x \in (0, \infty)$,

$$V(x) := \sup\{J_2(x; T, \xi); (T, \xi) \in A(x)\}. \quad (4.4.7)$$

Για μία συνάρτηση $\phi: [0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ ορίζουμε τον τελεστή μέγιστης ωφέλειας M ως

$$M\phi(x) := \sup\{\phi(x - \xi) + g_1(\xi)I_{\{\xi > 0\}} + g_2(-\xi)I_{\{\xi < 0\}} : \xi \in \mathfrak{R}, x - \xi \in (0, \infty)\}. \quad (4.4.8)$$

Το $MV(x)$ αντιπροσωπεύει την αξία της στρατηγικής κατά την οποία επιλέγεται η βέλτιστη άμεση επέμβαση (χωρίς να είναι αναγκαστικά απαραίτητη), ενώ στη συνέχεια επιλέγονται βέλτιστα οι χρόνοι και το μέγεθος των επόμενων παρεμβάσεων. Θεωρούμε ακόμα το διαφορικό τελεστή $\mathfrak{I}$ που ορίζεται ως

$$\mathfrak{I}\psi(x) := \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \mu x \frac{d\psi(x)}{dx} - \lambda \psi(x). \quad (4.4.9)$$

Βασιζόμαστε στα παραπάνω για την εύρεση της συνάρτησης αξίας και της βέλτιστης στρατηγικής.

Υποθέτουμε ότι για κάθε αρχική επένδυση υπάρχει μία βέλτιστη στρατηγική. Τότε, αν η διαδικασία ξεκινά από το x και ακολουθεί τη βέλτιστη στρατηγική η αναμενόμενη ωφέλεια είναι $V(x)$. Εναλλακτικά, αν η διαδικασία ξεκινά απ' το x , κάνει τη βέλτιστη άμεση επέμβαση και στη συνέχεια ακολουθεί τη βέλτιστη στρατηγική, η αναμενόμενη ωφέλεια είναι $MV(x)$. Εφόσον η πρώτη στρατηγική είναι βέλτιστη η αναμενόμενη ωφέλεια που αντιστοιχεί σε αυτή είναι μεγαλύτερη ή ίση από την αναμενόμενη ωφέλεια που σχετίζεται με τη δεύτερη στρατηγική. Επιπλέον, στην περίπτωση ισότητας, ο βέλτιστος έλεγχος είναι η αναπροσαρμογή της επένδυσης. Έτσι, $V(x) \geq MV(x)$, με ισότητα όταν είναι βέλτιστη η επαναφορά της επένδυσης στο επίπεδο-στόχο. Στην περιοχή όπου δεν επεμβαίνουμε στην επένδυση πρέπει να ισχύει $\mathfrak{I}V(x) = 0$ (από μία ευριστική εφαρμογή της αρχής δυναμικού προγραμματισμού στο πρόβλημα που εξετάζουμε). Οι παραπάνω διαισθητικές παρατηρήσεις μπορούν να

εφαρμοστούν για την εύρεση της συνάρτησης αξίας. Τις αξιοποιούμε χρησιμοποιώντας μαθηματικό φορμαλισμό στους δύο επόμενους ορισμούς και το επόμενο θεώρημα.

Ορισμός 4.4.2 (qν-ανισότητες) Θα λέμε ότι μία συνάρτηση $v: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις qν-ανισότητες για το πρόβλημα 4.2.2 αν για κάθε $x \in (0, \infty)$ ισχύει:

$$\mathfrak{I}v(x) \leq 0, \quad (4.4.10)$$

$$v(x) \geq Mv(x), \quad (4.4.11)$$

$$(v(x) - Mv(x))(\mathfrak{I}v(x)) = 0 \quad (4.4.12)$$

Ανισότητες τέτοιου είδους εξετάστηκαν, μεταξύ άλλων, από τους Bensoussan και Lions [9], Perthame [73, 74] και Baccarin [5] αλλά το θεωρητικό υπόβαθρο που αναπτύχθηκε στις παραπάνω εργασίες δεν μπορεί να εφαρμοστεί απευθείας στις ανισότητες (4.4.10)-(4.4.12).

Μία λύση v των qν-ανισοτήτων χωρίζει το διάστημα $(0, \infty)$ σε δύο περιοχές. Η πρώτη είναι η περιοχή που δεν γίνονται επεμβάσεις στην επένδυση και περιγράφεται ως:

$$C := \{x \in (0, \infty) : v(x) > Mv(x) \quad \text{και} \quad \mathfrak{I}v(x) = 0\}.$$

Ενώ στη δεύτερη περιοχή είναι βέλτιστη η επέμβαση του επενδυτή (και η διόρθωση του ποσού της επένδυσής του), και περιγράφεται ως:

$$\Sigma := \{x \in (0, \infty) : v(x) = Mv(x) \quad \text{και} \quad \mathfrak{I}v(x) < 0\}.$$

Από τη λύση των qν-ανισοτήτων μπορούμε να κατασκευάσουμε τον παρακάτω στοχαστικό έλεγχο με διακριτές προσαρμογές.

Ορισμός 4.4.3 Έστω v μία λύση των qν-ανισοτήτων. Καλούμε τον παρακάτω στοχαστικό έλεγχο

$$(T^v, \xi^v) = (\tau_1^v, \tau_2^v, \dots, \tau_n^v, \dots; \xi_1^v, \xi_2^v, \dots, \xi_n^v, \dots)$$

qν-έλεγχο σχετιζόμενο με τη v (εφόσον υπάρχει):

$$\begin{aligned}\tau_1^v &:= \inf \{t \geq 0 : v(X^v(t)) = Mv(X^v(t))\} \\ \xi_1^v &:= \arg \sup \{v(X^v(\tau_1^v) - \xi) + g_1(\xi)I_{\{\xi > 0\}} + g_2(\xi)I_{\{\xi < 0\}} : \xi \in \mathfrak{R}, X^v(\tau_1^v) - \xi \in (0, \infty)\}\end{aligned}$$

και για κάθε $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}\tau_n^v &:= \inf \{t \geq \tau_{n-1}^v : v(X^v(t)) = Mv(X^v(t))\} \\ \xi_n^v &:= \arg \sup \{v(X^v(\tau_n^v) - \xi) + g_1(\xi)I_{\{\xi > 0\}} + g_2(-\xi)I_{\{\xi < 0\}} : \xi \in \mathfrak{R}, X^v(\tau_n^v) - \xi \in (0, \infty)\}\end{aligned}$$

όπου $\tau_0^v := 0$ και $\xi_0^v := 0$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω ο επενδυτής επεμβαίνει όταν τα v και Mv ταυτίζονται και το μέγεθος των επεμβάσεών του αντιστοιχεί στη λύση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης για το $Mv(x)$.

Ο Korn [53] διατύπωσε μία αναγκαία και ικανή συνθήκη για προβλήματα στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές και την εφάρμοσε σε μία σειρά παραδειγμάτων. Σε κάθε παράδειγμα έδειξε ότι ένας αποδεκτός έλεγχος ικανοποιεί την επαρκή συνθήκη και είναι επομένως βέλτιστος. Η παρακάτω εκδοχή του θεωρήματος 3.2 του Korn [53] είναι κατάλληλη για την εφαρμογή που εξετάζουμε σε αυτό το κεφάλαιο.

Θεώρημα 4.4.1 Έστω $v \in C^1([0, \infty); \mathfrak{R})$ μία λύση των qv-ανισοτήτων και έστω $a, b \in (0, \infty)$ τέτοια ώστε $v \in C^2([0, \infty) - \{a, b\}; \mathfrak{R})$. Έστω επίσης ότι για κάθε $y \geq a$ ισχύει:

$$v(x) = \mu_1 + \lambda_1(x - \chi)^{\gamma_1}, \quad (4.4.13)$$

και για κάθε $0 < x \leq b < a$

$$v(x) = \mu_2 - \lambda_2(\chi - x)^{\gamma_2}, \quad (4.4.14)$$

όπου $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{R}$, και $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, \infty)$. Τότε, για κάθε $x \in (0, \infty)$:

$$V(x) \leq v(x). \quad (4.4.15)$$

Επιπλέον, αν ο qv-έλεγχος (T^v, ξ^v) που αντιστοιχεί στη v είναι αποδεκτός, τότε είναι βέλτιστος και για κάθε $x \in (0, \infty)$ ισχύει:

$$V(x) = v(x) = J_2(x; T^v, \xi^v). \quad (4.4.16)$$

Απόδειξη. Παρουσιάζεται στο παράρτημα A1.

Λύση των qv-ανισοτήτων

Συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μία βέλτιστη λύση (T, ξ) που χαρακτηρίζεται από δύο παραμέτρους L, U με $0 < L < \chi < U < \infty$ τέτοιες ώστε η βέλτιστη στρατηγική είναι η παραμονή στο διάστημα $[L, U]$ και η μετάβαση στο χ όταν η στοχαστική διαδικασία βρεθεί στα άκρα του διαστήματος. Συμπεραίνουμε ότι για κάθε $i \in \mathbb{N}$:

$$\tau_i = \inf\{t > \tau_{i-1} : X_t \notin (L, U)\} \quad (4.4.17)$$

και

$$X_{\tau_i+} = X_{\tau_i} + \xi_i = \chi(I_{X_{\tau_i}=U} + I_{X_{\tau_i}=L}). \quad (4.4.18)$$

Έτσι, η συνάρτηση αξίας θα ικανοποιεί,

$$\forall x \in [U, \infty): \quad V(x) = v(\chi) - K_1 + \frac{1}{\gamma_1} [k_1(x - \chi)]^{\gamma_1} \quad (4.4.19)$$

και

$$\forall x \in (0, L]: \quad V(x) = v(\chi) - K_2 - \frac{1}{\gamma_2} [k_2(\chi - x)]^{\gamma_2}. \quad (4.4.20)$$

Για να είναι η V παραγωγίσιμη στα $\{L, U\}$, από τις (4.4.19), (4.4.20) παίρνουμε τις παρακάτω σχέσεις:

$$V'(U) = k_1^{\gamma_1} (U - \chi)^{\gamma_1-1} \quad (4.4.21)$$

και

$$V'(L) = k_2^{\gamma_2} (\chi - L)^{\gamma_2-1}. \quad (4.4.22)$$

Συμπεραίνουμε επίσης ότι το διάστημα στο οποίο δε λαμβάνει χώρα κάποιος έλεγχος είναι το (L, U) , και ισχύει:

$$\forall x \in [L, U]: \quad \mathfrak{I}v(x) = \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{d^2 v(x)}{dx^2} + \mu x \frac{dv(x)}{dx} - \lambda v(x) = 0. \quad (4.4.23)$$

Εφαρμόζοντας μεθόδους επίλυσης για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις παίρνουμε τη γενική λύση της (4.4.23) η οποία δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$v(x) = C_1 x^{a_1} + C_2 x^{a_2} \quad (4.4.24)$$

με C_1, C_2 άγνωστες σταθερές και

$$a_{1,2} = -\frac{-2\mu + \sigma^2 \pm (4\mu^2 - 4\mu\sigma^2 + \sigma^4 + 8\lambda\sigma^2)^{1/2}}{2\sigma^2}. \quad (4.4.25)$$

Συμπερασματικά, η λύση του προβλήματος στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές περιγράφεται από τις σχέσεις (4.4.17)-(4.4.18) και οι τέσσερις άγνωστοι L, U, C_1, C_2 αποτελούν λύση του παρακάτω συστήματος μη γραμμικών εξισώσεων:

$$h(U) = h(\chi) - K_1 + \frac{1}{\gamma_1} k_1^{\gamma_1} (U - \chi)^{\gamma_1} \quad (4.4.26)$$

$$h(L) = h(\chi) - K_2 - \frac{1}{\gamma_2} k_2^{\gamma_2} (\chi - L)^{\gamma_2} \quad (4.4.27)$$

$$h'(U) = k_1^{\gamma_1} (U - \chi)^{\gamma_1-1} \quad (4.4.28)$$

$$h'(L) = k_2^{\gamma_2} (\chi - L)^{\gamma_2-1}. \quad (4.4.29)$$

όπου

$$h(x) = C_1 x^{a_1} + C_2 x^{a_2}. \quad (4.4.30)$$

Τα παραπάνω διατυπώνονται με περισσότερη μαθηματική αυστηρότητα στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.4.2. Έστω L, U με $L < x < U < \infty$ να αποτελούν λύση του συστήματος (4.4.26)-(4.4.29). Ορίζουμε τη συνάρτηση $V : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ως:

$$V(x) := \begin{cases} h(\chi) - K_1 + \frac{1}{\gamma_1} k_1^{\gamma_1} (x - \chi)^{\gamma_1} & \text{για } x > U \\ h(x) & \text{για } L \leq x \leq U \\ h(\chi) - K_2 - \frac{1}{\gamma_2} k_2^{\gamma_2} (\chi - x)^{\gamma_2} & \text{για } x < L \end{cases} \quad (4.4.31)$$

Αν για κάθε $x > U$ ισχύει

$$\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 k_1^{\gamma_1} (\gamma_1 - 1) (x - \chi)^{\gamma_1-2} + \mu x k_1^{\gamma_1} (x - \chi)^{\gamma_1-1} - \lambda \left[h(\chi) - K_1 + \frac{k_1^{\gamma_1}}{\gamma_1} (x - \chi)^{\gamma_1} \right] < 0 \quad (4.4.32)$$

για κάθε $x < L$ ισχύει

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 k_2^{\gamma_2} (\gamma_2 - 1) (\chi - x)^{\gamma_2 - 2} - \mu \alpha k_2^{\gamma_2} (\chi - x)^{\gamma_2 - 1} - \lambda \left[h(\chi) - K_2 - \frac{k_2^{\gamma_2}}{\gamma_2} (\chi - x)^{\gamma_2} \right] < 0, \quad (4.4.33)$$

εφόσον επίσης η συνάρτηση $\Phi_x : [\chi, U] \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$\Phi_x(x) := h(x) + K_1 - \frac{k_1^{\gamma_1}}{\gamma_1} (x - \chi)^{\gamma_1} \quad (4.4.34)$$

είναι αύξουσα στο διάστημα $[\chi, U]$, και η συνάρτηση $\Psi_\chi : [L, \chi] \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$\Psi_\chi(x) := h(x) + K_2 + \frac{k_2^{\gamma_2}}{\gamma_2} (\chi - x)^{\gamma_2} \quad (4.4.35)$$

είναι φθίνουσα στο διάστημα $[L, \chi]$ τότε η v είναι η συνάρτηση αξίας του προβλήματος 4.2.2. Δηλαδή,

$$v(x) = V(x) = \sup \{ J_2(x; T, \xi) : (T, \xi) \in A(x) \}$$

και η βέλτιστη στρατηγική δίνεται από τις (4.4.17), (4.4.18).

Απόδειξη. Παρουσιάζεται στο παράρτημα A2.

4.5 Εφαρμογή

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε την αριθμητική επίλυση των προβλημάτων στοχαστικού ελέγχου που εξετάστηκαν στις δύο προηγούμενες ενότητες. Για το εργοδικό πρόβλημα της τρίτης ενότητας, πρέπει αρχικά να βρεθούν οι λύσεις στο σύστημα των μη γραμμικών εξισώσεων που αντιπροσωπεύουν τις παραγώγους της συνάρτησης z στην (4.2.8) ως προς τα L και U . Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της εφαρμογής ενός αλγορίθμου Newton-Raphson για διαφορετικές αρχικές τιμές. Τα ζεύγη (L, U) τα οποία επιλύουν το σύστημα είναι τοπικά μέγιστα, εφόσον η Εσσιανή του συστήματος σε αυτά τα σημεία είναι αρνητικά ορισμένη. Στην πράξη η διαδικασία εύρεση καθολικού μέγιστου καθοδηγείται από ένα τρισδιάστατο γράφημα της z σαν αυτό που φαίνεται παρακάτω.

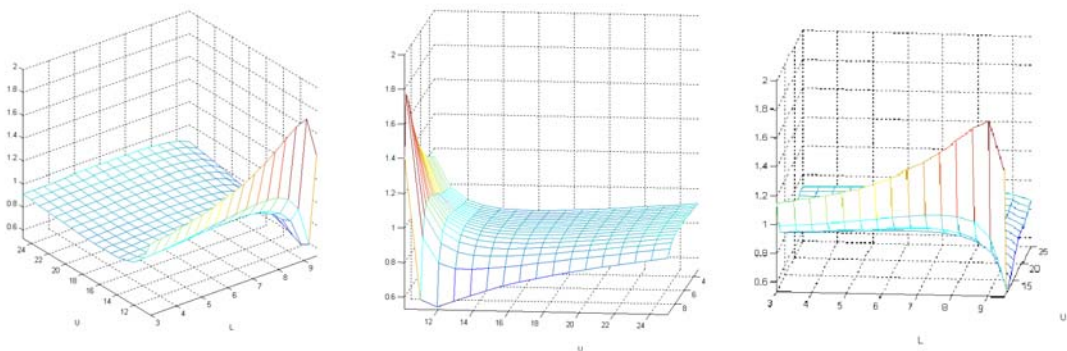
Για το υφαιρετικό πρόβλημα της τέταρτης ενότητας παρουσιάζονται λύσεις στο σύστημα των μη γραμμικών εξισώσεων (4.4.26)-(4.4.29) για τις τέσσερις άγνωστες παραμέτρους: τα άκρα του διαστήματος ελέγχου L και U και τις δύο σταθερές C_1 and C_2 της σχέσης (4.4.23) που χαρακτηρίζουν την εξέλιξη της συνάρτησης αξίας μέσα στο διάστημα ελέγχου. Πρέπει να επισημανθεί ότι και τα δύο μη γραμμικά προβλήματα είναι σύνθετα και η σύγκλιση των αριθμητικών σχημάτων εξαρτάται από τις αρχικές τιμές που παρέχονται στους αλγορίθμους. Για την πραγματοποίηση της ανάλυσης ευαισθησίας βρέθηκαν πρώτα αρχικές τιμές για ένα βασικό πρόβλημα και στη συνέχεια για κάθε μικρή μεταβολή των παραμέτρων του προβλήματος, εισαγάγαμε ως αρχικές τιμές τα αποτελέσματα της προηγούμενης εκτέλεσης. Οι κατάλληλοι κώδικες έχουν γραφτεί σε MATLAB.

Ένα παράδειγμα

Θεωρούμε αρχικά τα παρακάτω δεδομένα σχετικά με τα χαρακτηριστικά της αγοράς και του επενδυτή:

$$\begin{aligned} \mu &= 0.1 & \sigma &= 0.2 & \lambda &= 0.01 & K_1 &= 0.05 & K_2 &= 0.05 \\ k_1 &= 0.95 & k_2 &= 1.1 & \chi &= 10 & \gamma_1 &= 0.8 & \gamma_2 &= 0.9 \end{aligned}$$

Για το εργοδικό πρόβλημα βρίσκουμε ως πιθανές λύσεις τα ζεύγη (9.0796, 10.1348) και (6.4081, 16.3629). Ο υπολογισμός της Εσσιανής στα παραπάνω σημεία υποδεικνύει ότι το πρώτο ζεύγος αντιστοιχεί στο καθολικό μέγιστο ενώ το δεύτερο ζεύγος σε ένα σαγματικό σημείο. Τα παραπάνω φαίνονται στο τρισδιάστατο γράφημα της z (γράφημα 4.1).



Γράφημα 4.1 Τρισδιάστατες όψεις της συνάρτησης z της (4.2.8) για τις παραμέτρους του βασικού παραδείγματος.

Για το υφαιρετικό πρόβλημα βρίσκουμε επίσης δύο πιθανές λύσεις:

$$U=10.1338 \quad L=9.0116 \quad C_1=157.2394 \quad C_2=534.1197$$

και

$$U=19.2442 \quad L=4.8551 \quad C_1=52.4051 \quad C_2=45.9706.$$

Όμως, μόνο η πρώτη τετράδα ικανοποιεί τις συνθήκες (4.4.32)-(4.4.35). Και για τα δύο προβλήματα τα σφάλματα είναι της τάξης του 10^{-8} . Παρατηρούμε ότι για τον υφαιρετικό ρυθμό του συγκεκριμένου παραδείγματος ο επενδυτής που υιοθετεί το υφαιρετικό κριτήριο επεμβαίνει νωρίτερα (αργότερα) σε σχέση με αυτόν που υιοθετεί το εργοδικό κριτήριο σε ότι αφορά το δεξί (αριστερό) άκρο του διαστήματος ελέγχου στο οποίο ανήκει το χ . Η πιθανότητα να φτάσει πρώτα στο U (και να αποταμιεύσει $U-\chi$) αυτός που υιοθετεί το υφαιρετικό κριτήριο είναι 0.9089 ενώ η αντίστοιχη πιθανότητα είναι 0.9004 για κάποιον που υιοθετεί το εργοδικό κριτήριο. Δηλαδή για το συγκεκριμένο υφαιρετικό ρυθμό, ο επενδυτής που επιλέγει το εργοδικό κριτήριο επιδεικνύει μικρότερη αποστροφή στον κίνδυνο.

Ανάλυση Ευαισθησίας

Για την ανάλυση ευαισθησίας χρησιμοποιήθηκαν ως αρχικές τιμές για τις παραμέτρους που χαρακτηρίζουν την αγορά και τον επενδυτή, αυτές που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο παράδειγμα. Κάθε παράμετρος μεταβαλλόταν ξεχωριστά ώστε να γίνει κατανοητή η ευαισθησία των βέλτιστων στρατηγικών σε σχέση με τις παραμέτρους του μοντέλου. Ο πίνακας 4.1 παρουσιάζει τα διαστήματα ελέγχου για μεταβαλλόμενο υφαιρετικό ρυθμό για δύο τιμές της παραμέτρου διασποράς σ . Και στις δύο περιπτώσεις τα άνω όρια του διαστήματος ελέγχου φαίνονται να μην επηρεάζονται ιδιαίτερα από τις αλλαγές στον υφαιρετικό ρυθμό. Αντίθετα τα κάτω όρια εξαρτώνται γραμμικά από τον υφαιρετικό ρυθμό. Πράγματι, για $\sigma = 0.2$ παίρνουμε τέλεια εφαρμογή (ο συντελεστής R^2 καλής εφαρμογής της παλινδρόμησης ισούται με ένα) από την ευθεία παλινδρόμησης $L = 9.014 - 0.234 \cdot \lambda$, ενώ για $\sigma = 0.3$ η ευθεία παλινδρόμησης που εφαρμόζει ακριβώς στα δεδομένα εκφράζεται ως: $L = 8.968 - 0.126 \cdot \lambda$. Συνεπώς, για αυξανόμενα επίπεδα μεταβλητότητας της στοχαστικής διαδικασίας, τα διαστήματα ελέγχου γίνονται λιγότερο ευαίσθητα στις αλλαγές του υφαιρετικού ρυθμού. Όπως φθίνει ο ρυθμός υφαίρεσης τα διαστήματα ελέγχου του υφαιρετικού προβλήματος τείνουν να πλησιάζουν αυτά που προκύπτουν από το εργοδικό πρόβλημα.

Πίνακας 4.1 Διαστήματα ελέγχου για το υφαιρετικό πρόβλημα για μεταβαλλόμενο υφαιρετικό ρυθμό για δύο επίπεδα μεταβλητότητας της στοχαστικής διαδικασίας.

λ	$L \sigma = 0.2$	$U \sigma = 0.2$	$L \sigma = 0.3$	$U \sigma = 0.3$
0.005	9.0127	10.1338	8.9671	10.1332
0.010	9.0116	10.1338	8.9664	10.1332
0.015	9.0104	10.1338	8.9658	10.1332
0.020	9.0093	10.1337	8.9652	10.1332
0.025	9.0081	10.1337	8.9646	10.1332
0.030	9.0069	10.1337	8.9639	10.1332
0.035	9.0057	10.1337	8.9633	10.1332
0.040	9.0046	10.1337	8.9627	10.1332
0.045	9.0034	10.1337	8.9620	10.1332
0.050	9.0022	10.1336	8.9614	10.1331

Η ευαισθησία των διαστημάτων ελέγχου σε σχέση με τις παραμέτρους που χαρακτηρίζουν τα κόστη φαίνεται στους πίνακες 4.2 και 4.3. Εδώ επαληθεύεται η προφανής διαίσθηση: ο επενδυτής αναπροσαρμόζει την επένδυσή του πιο συχνά για χαμηλές τιμές του κόστους συναλλαγής. Παρατηρούμε επίσης ότι τα διαστήματα ελέγχου για το υφαιρετικό και το εργοδικό πρόβλημα διαφέρουν περισσότερο όσο αυξάνουν τα κόστη συναλλαγής με τα κάτω όρια να διαφέρουν περισσότερο από τα πάνω. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης ευαισθησίας σε σχέση με τις παραμέτρους γ_1 και γ_2 παρουσιάζεται στους πίνακες 4.4 και 4.5. Όπως αυξάνει το γ_1 , οι αποταμιεύσεις γίνονται πιο σημαντικές για τον επενδυτή. Ως εκ τούτου τα άνω όρια ελέγχου αυξάνουν και τα κάτω όρια φθίνουν (γράφημα 4.2). Επιπλέον, οι διαφορές μεταξύ των στρατηγικών που προκύπτουν από τα δύο κριτήρια βελτιστοποίησης αυξάνουν όσο το γ_1 αυξάνει. Όπως φαίνεται στους πίνακες 4.4 και 4.5 τα αντίθετα ισχύουν για αυξανόμενες τιμές του γ_2 . Χρησιμοποιώντας μεθόδους στατιστικής παλινδρόμησης βρήκαμε ότι η καμπύλες (που εφαρμόζουν τέλεια στα δεδομένα) που περιγράφουν τη μεταβολή των άκρων των διαστημάτων ελέγχου είναι πολυώνυμα τρίτου βαθμού. Για γ_1 , γ_2 που μεταβάλλονται από 0.8 ως 0.9 τα πολυώνυμα έχουν την παρακάτω μορφή.

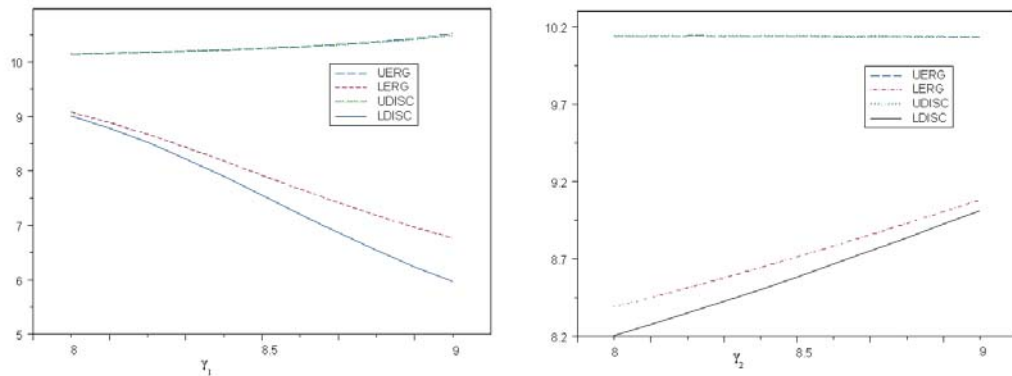
$$\begin{aligned}
 U_{DISC} &= -119 + 473.4 \cdot \gamma_1 - 580.5 \cdot \gamma_1^2 + 258.2 \cdot \gamma_1^3 \\
 U_{ERG} &= -181.1 + 697.9 \cdot \gamma_1 - 850.9 \cdot \gamma_1^2 + 346.8 \cdot \gamma_1^3 \\
 L_{DISC} &= -1029 + 3707 \cdot \gamma_2 - 4379 \cdot \gamma_2^2 + 1708 \cdot \gamma_2^3 \\
 L_{ERG} &= -648.9 + 2370 \cdot \gamma_2 - 2818 \cdot \gamma_2^2 + 1105 \cdot \gamma_2^3
 \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

Στους πίνακες 4.6-4.8 εξετάζεται η ευαισθησία σε σχέση με τη μεταβλητότητα, την αναμενόμενη απόδοση και το στοχευόμενο επίπεδο της

επένδυσης αντίστοιχα. Όπως αυξάνει η μεταβλητότητα το κάτω άκρο του διαστήματος ελέγχου φθίνει και το ίδιο συμβαίνει για το άνω άκρο. Από την άλλη πλευρά, και τα δύο άκρα αυξάνουν όσο αυξάνουν τα μ και χ και η διαφορά μεταξύ εργοδικών / υφαιρετικών στρατηγικών αυξάνει όσο αυξάνει το μ . Όπως και προηγουμένως, τα διαστήματα ελέγχου μπορούν να εκφραστούν ως ευθείες παλινδρόμησης. Για το εύρος των τιμών του μ που θεωρήσαμε στο αριθμητικό μας πείραμα ισχύουν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{aligned} U_{DISC} &= 10.13 + 0.0108 \cdot \mu \\ U_{ERG} &= 10.13 + 0.02 \cdot \mu \\ L_{DISC} &= 8.931 + 0.806 \cdot \mu \\ L_{ERG} &= 8.954 + 1.249 \cdot \mu \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

Οι κλίσεις στις ευθείες παλινδρόμησης υποδεικνύουν μεγαλύτερη ευαισθησία των εργοδικών στρατηγικών όπως το μ αυξάνει.



Γράφημα 4.2 Διαστήματα ελέγχου για το εργοδικό και το υφαιρετικό πρόβλημα για μεταβαλλόμενες τιμές στα γ_1 και γ_2 .

Πίνακας 4.2 Διαστήματα ελέγχου για το εργοδικό και το υφαιρετικό πρόβλημα για διαφορετικά πάγια κόστη.

K_1	K_2	L_{ERG}	U_{ERG}	L_{DISC}	U_{DISC}
0.09	0.09	7.9845	10.2968	7.6466	10.2912
0.08	0.08	8.2411	10.2529	7.9816	10.2489
0.07	0.07	8.5131	10.2112	8.3280	10.2085
0.06	0.06	8.7956	10.1718	8.6759	10.1701
0.05	0.05	9.0796	10.1348	9.0116	10.1338

Πίνακας 4.3 Διαστήματα ελέγχου για το εργοδικό και το υφαιρετικό πρόβλημα για διαφορετικά αναλογικά κόστη.

k_1	k_2	L_{ERG}	U_{ERG}	L_{DISC}	U_{DISC}
0.95	1.10	9.0796	10.1348	9.0116	10.1338
0.96	1.09	9.1524	10.1324	9.0956	10.1314
0.97	1.08	9.2180	10.1301	9.1702	10.1291
0.98	1.07	9.2768	10.1278	9.2365	10.1268
0.99	1.06	9.3297	10.1254	9.2955	10.1245
0.99	1.05	9.3507	10.1249	9.3188	10.1241
0.99	1.04	9.3708	10.1244	9.3708	10.1234
0.99	1.03	9.3902	10.1239	9.3623	10.1230
0.99	1.02	9.4087	10.1234	9.3826	10.1225

Πίνακας 4.4 Διαστήματα ελέγχου για το εργοδικό και το υφαιρετικό πρόβλημα για διαφορετικές τιμές του γ_1 .

γ_1	L_{ERG}	U_{ERG}	L_{DISC}	U_{DISC}
0.80	9.0796	10.1348	9.0116	10.1338
0.81	8.8899	10.1511	8.7875	10.1498
0.82	8.6739	10.1696	8.5233	10.1678
0.83	8.4361	10.1907	8.2226	10.1882
0.84	8.1837	10.2148	7.8937	10.2114
0.85	7.9248	10.2429	7.5485	10.2380
0.86	7.6674	10.2761	7.1999	10.2691
0.87	7.4182	10.3161	6.8597	10.3059
0.88	7.1826	10.3657	6.5373	10.3504
0.89	6.9651	10.4298	6.2392	10.4056
0.90	6.7693	10.5186	5.9700	10.4769

Πίνακας 4.5 Διαστήματα ελέγχου για το εργοδικό και το υφαιρετικό πρόβλημα για διαφορετικές τιμές του γ_2 .

γ_2	L_{ERG}	U_{ERG}	L_{DISC}	U_{DISC}
0.80	8.3896	10.1381	8.2058	10.1367
0.81	8.4502	10.1379	8.2770	10.1365
0.82	8.5129	10.1377	8.3506	10.1364
0.83	8.5775	10.1375	8.4265	10.1361
0.84	8.6442	10.1372	8.5047	10.1359
0.85	8.7129	10.1369	8.5853	10.1357
0.86	8.7835	10.1366	8.6679	10.1354
0.87	8.8558	10.1362	8.7524	10.1351
0.88	8.9296	10.1358	8.8383	10.1347
0.89	9.0044	10.1353	8.9250	10.1343
0.90	9.0796	10.1348	9.0116	10.1338

Πίνακας 4.6. Διαστήματα ελέγχου για το εργοδικό και το υφαιρετικό πρόβλημα για διαφορετικές τιμές του σ .

σ	L_{ERG}	U_{ERG}	L_{DISC}	U_{DISC}
0.30	9.0053	10.1337	8.9664	10.1332
0.25	9.0342	10.1341	8.9833	10.1334
0.20	9.0796	10.1348	9.0116	10.1338

Πίνακας 4.7 Διαστήματα ελέγχου για το εργοδικό και το υφαιρετικό πρόβλημα για διαφορετικές τιμές του μ .

μ	L_{ERG}	U_{ERG}	L_{DISC}	U_{DISC}
0.12	9.1014	10.1352	9.0264	10.1340
0.11	9.0907	10.1350	9.0191	10.1339
0.10	9.0796	10.1348	9.0116	10.1338
0.09	9.0679	10.1346	9.0038	10.1337
0.08	9.0555	10.1344	8.9958	10.1336
0.07	9.0424	10.1342	8.9875	10.1335
0.06	9.0286	10.1340	8.9789	10.1334
0.05	9.0139	10.1338	8.9700	10.1332

Πίνακας 4.8 Διαστήματα ελέγχου για το εργοδικό και το υφαιρετικό πρόβλημα για διαφορετικές τιμές του χ .

χ	L_{ERG}	U_{ERG}	L_{DISC}	U_{DISC}
10.02	9.0992	10.1548	9.0313	10.1538
10.00	9.0796	10.1348	9.0116	10.1338
9.98	9.0599	10.1148	8.9919	10.1138
9.95	9.0305	10.0848	8.9623	10.0838

5 Βέλτιστη εφαρμογή χαρτοφυλακίου σταθερών αναλογιών με εργοδικά κριτήρια βελτιστοποίησης

5.1 Περιγραφή του προβλήματος και σχετιζόμενη βιβλιογραφία

Σε αυτό το κεφάλαιο εξετάζεται το πρόβλημα που αντιμετωπίζει ένας επενδυτής ο οποίος επιθυμεί να έχει σταθερές αναλογίες του συνολικού του επενδυτικού κεφαλαίου σε διαφορετικές επενδυτικές επιλογές (μετοχές, ομόλογα κ.τ.λ.). Ο επενδυτής μπορεί να είναι «παθητικός» με την έννοια ότι απλώς μπορεί να θέλει η επένδυσή του να ακολουθεί έναν χρηματιστηριακό δείκτη (Grinold και Kahn [38], Focardi και Fabozzi [36]) ή «ενεργητικός» με την έννοια ότι οι σταθερές αναλογίες που θέλει ο επενδυτής να εφαρμόσει στο χαρτοφυλάκιό του προήλθαν από ένα κριτήριο μεγιστοποίησης μίας συνάρτησης ωφέλειας ή κάποιο κριτήριο πιθανότητας¹ υπό την (συνήθη) υπόθεση μηδενικού κόστους συναλλαγής. Το πρόβλημα που αντιμετωπίζει ο επενδυτής στην πράξη είναι: Τι επενδυτική στρατηγική πρέπει να ακολουθήσει εφόσον είναι δεδομένη η παρουσία πάγιου και αναλογικού κόστους ανά συναλλαγή? Εδώ εξετάζουμε μία απλή εκδοχή του παραπάνω προβλήματος. Θεωρούμε ότι οι επενδυτικές επιλογές περιορίζονται σε δύο: μία σταθερής απόδοσης και μηδενικού κινδύνου και μία με μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση αλλά και με τυχαίες διακυμάνσεις που δημιουργούν αβεβαιότητα. Προφανώς, ο επενδυτής επιθυμεί να βρίσκεται κοντά στις αναλογίες τις οποίες έχει προαποφασίσει ενώ δεν θέλει να επεμβαίνει συχνά για να επαναφέρει το χαρτοφυλάκιό του στις αναλογίες στόχους ώστε να αποφύγει τα πολλά κόστη συναλλαγών. Στην προκειμένη περίπτωση, ο επενδυτής επιθυμεί να ελαχιστοποιήσει έναν συνδυασμό που αποτελείται από μία (δευτέρου βαθμού) συνάρτηση απώλειας για την απόσταση των αναλογιών από τις αναλογίες στόχους και τα κόστη συναλλαγής.

Ένα παρόμοιο πρόβλημα εξετάστηκε από τους Leland [56] και Pliska και Suzuki [77]. Και στα δύο παραπάνω άρθρα εξετάστηκε η στοχαστική διαδικασία που εκφράζει τις τυχαίες διακυμάνσεις της αναλογίας που ιδανικά θα παρέμενε σταθερά ίση με τα επίπεδα-στόχους. Στο άρθρο του Leland [56] χρησιμοποιήθηκε μια προσέγγιση της στοχαστικής διαδικασίας και ελήφθησαν υπόψη μόνο αναλογικά (και όχι πάγια) κόστη ανά συναλλαγή. Οι Pliska και Suzuki [77] βάσισαν την ανάλυσή τους στην (αρκετά πολύπλοκη) αναλυτική μορφή της στοχαστικής διαδικασίας και

¹ Ένας σημαντικός αριθμός κριτηρίων βελτιστοποίησης οδηγεί τελικά σε στρατηγικές σταθερών αναλογιών υπό την υπόθεση της μη ύπαρξης κόστους συναλλαγής. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν οι συναρτήσεις ωφέλειας τύπου HARA, (Merton [66]) και προβλήματα όπως η ελαχιστοποίηση του χρόνου επιτυχίας ενός στόχου, η μεγιστοποίηση της πιθανότητας επιτυχίας ενός στόχου (Browne [15, 16]) κ.α.

υπέθεσαν –πιο ρεαλιστικά- την ύπαρξη πάγιου και αναλογικού κόστους ανά συναλλαγή. Και στα δύο παραπάνω άρθρα ο στόχος ήταν η υφαιρετική ελαχιστοποίηση των αθροιστικών τετραγωνικών αποστάσεων από τις αναλογίες-στόχους και των κοστών συναλλαγής σε έναν άπειρο χρονικό ορίζοντα. Όμως, για το συγκεκριμένο πρόβλημα, ένα υφαιρετικό κριτήριο βελτιστοποίησης δεν έχει οικονομικό νόημα διότι δεν ισχύει απαραίτητα ότι ένα ποσό σφάλματος (απόσταση από την αναλογία-στόχο) είναι προτιμότερο να συμβεί στο μέλλον και όχι στο παρόν². Είναι προτιμότερο λοιπόν να υιοθετηθεί ένα εργοδικό κριτήριο που ελαχιστοποιεί το τετραγωνικό σφάλμα και τα κόστη συναλλαγής ανά μονάδα χρόνου.

Το κεφάλαιο διαμορφώνεται ως εξής: Στη δεύτερη ενότητα διατυπώνουμε το πρόβλημα με μαθηματικούς όρους και παρουσιάζουμε το κριτήριο βελτιστοποίησης. Στην τρίτη ενότητα λύνουμε το πρόβλημα συνδυάζοντας βασικά εργαλεία στοχαστικού λογισμού και αριθμητικές τεχνικές μη γραμμικής βελτιστοποίησης, παρόμοια με το προηγούμενο κεφάλαιο. Για να συγκρίνουμε με τις βέλτιστες στρατηγικές που προκύπτουν με τη χρήση υφαιρετικού κριτηρίου, στην τέταρτη ενότητα λύνουμε το αντίστοιχο υφαιρετικό πρόβλημα. Η μεθοδολογία που παρουσιάζεται εδώ είναι παρόμοια με αυτή στο άρθρο των Pliska και Suzuki [77] με δύο διαφορές: πρώτον το κριτήριο βελτιστοποίησης αφορά καθαρά την διαφορά μεταξύ παρατηρούμενων αναλογιών και στόχων και δεύτερον υιοθετείται ένας μετασχηματισμός που προτάθηκε πρόσφατα από τον Nagai [69] ο οποίος μειώνει σημαντικά την υπολογιστική δυσκολία του προβλήματος. Στην πέμπτη ενότητα αναλύουμε την πυκνότητα πιθανότητας των στοχαστικών αναλογιών χαρτοφυλακίου. Τέλος, στην έκτη ενότητα παρουσιάζουμε μία συγκριτική ανάλυση ευαισθησίας για το εργοδικό και το αντίστοιχο υφαιρετικό πρόβλημα.

5.2 Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος

Θεωρούμε ένα απλό μοντέλο αγοράς στην οποία είναι διαθέσιμες δύο επενδυτικές επιλογές. Η πρώτη έχει βέβαιες αποδόσεις και το κεφάλαιο που τοποθετείται σε αυτή περιγράφεται από την παρακάτω συνήθη διαφορική εξίσωση

$$dS^0(t) = rS^0(t)dt, \quad S^0(0) = s^0, \quad (5.2.1)$$

² Ένα παρόμοιο επιχείρημα παρουσιάζεται από τους Jack και Zervos [41] και Melas και Zervos [62] για τον έλεγχο μιας συναλλαγματικής ισοτιμίας.

ενώ το κεφάλαιο που τοποθετείται στη δεύτερη επενδυτική επιλογή εξελίσσεται σύμφωνα με μία στοχαστική διαφορική εξίσωση, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$dS^1(t) = S^1(t)(\mu dt + \sigma dW_t), \quad S^1(0) = s^1 \quad (5.2.2)$$

με W_t να συμβολίζει μία τυπική κίνηση Brown σε ένα χώρο πιθανότητας (Ω, F, P, F_t) . Συμβολίζουμε με το ζεύγος $(p^0(t), p^1(t))$ τον αριθμό επιλεγμένων μεριδίων από την κάθε επενδυτική επιλογή τη χρονική στιγμή t . Η αξία της επένδυσης δίνεται από την παράσταση $V(t) := \sum_{i=0}^1 p^i(t) S^i(t)$ που είναι αυστηρά θετική για κάθε $t \geq 0$. Μπορούμε τώρα να ορίσουμε τη στοχαστική διαδικασία επενδυτικών αναλογιών $b^i(t)$ ως

$$b^i(t) = \frac{p^i(t) S^i(t)}{V(t)}, \quad i = 0, 1 \quad (5.2.3)$$

και θέτουμε $b(t) = b^1(t)$. Στο μοντέλο μας δεν επιτρέπουμε short-selling και δανεισμούς οπότε πρέπει να ισχύει $b(t) \geq 0$ και $b(t) \leq 1$ για κάθε t . Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη της αυτοχρηματοδότησης για την επένδυση το $V(t)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$dV(t) = V(t) \left(\sum_{i=0}^1 b^i(t) \frac{dS^i(t)}{S^i(t)} \right) = b^0(t) r dt + b^1(t) (\mu dt + \sigma dW_t), \quad V(0) = v \quad (5.2.4)$$

που εναλλακτικά εκφράζεται ως

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = (r + b(t)(\mu - r)) dt + b(t) \sigma dW_t, \quad V(0) = v. \quad (5.2.5)$$

Η στοχαστική διαδικασία που εκφράζει τις επενδυτικές αναλογίες μελετήθηκε αρχικά από τους Morton και Pliska [67]. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Ito, έδειξαν ότι για την περίπτωση των δύο επενδυτικών επιλογών εξελίσσεται με βάση την ακόλουθη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$db_t = b_t(1 - b_t)(\mu - r - \sigma^2 b_t) dt + b_t(1 - b_t) \sigma dW_t. \quad (5.2.6)$$

Για να διευκολύνουμε τους υπολογισμούς στις επόμενες ενότητες, υιοθετούμε έναν 1-1 μετασχηματισμό για την παραπάνω στοχαστική

διαδικασία ο οποίος προτάθηκε πρόσφατα από τον Nagai [69] και ορίζεται ως

$$y = \psi(b) := \log b - \log(1 - b), \quad (5.2.7)$$

με την αντίστοιχη αντίστροφη απεικόνιση να ορίζεται ως

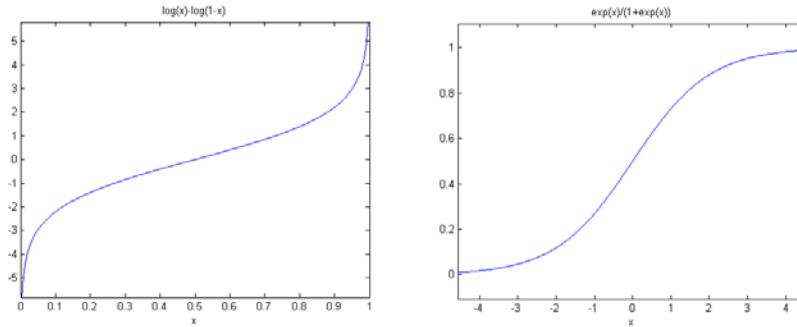
$$\phi(y) := \frac{\exp y}{1 + \exp y}. \quad (5.2.8)$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα το Ito, βρίσκουμε ότι το y εξελίσσεται με βάση τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dy_t = \kappa dt + \sigma dW_t \quad (5.2.9)$$

όπου

$$\kappa = \mu - r - \frac{\sigma^2}{2}.$$



Γράφημα 5.1. Ο μετασχηματισμός του Nagai και η αντίστροφη απεικόνιση για τη δισδιάστατη περίπτωση.

Συμβολίζουμε με $\tilde{b}$ και $\tilde{y}$ την επιθυμητή αναλογία στην αρχική³ και τη μετασχηματισμένη κλίμακα αντίστοιχα. Αν η παρατηρούμενη αναλογία στη μετασχηματισμένη κλίμακα είναι y και τη μεταβάλλουμε μέσω μίας

³ Τα επιθυμητά επίπεδα των αναλογιών μπορούν να είναι για παράδειγμα ίσα με $\frac{\mu - r}{\sigma^2}$, την αναλογία που μεγιστοποιεί μία λογαριθμική συνάρτηση ωφέλειας, $\frac{\mu - r}{(1 - \gamma)\sigma^2}$, $\{\gamma \in \mathbb{R} : \gamma < 1, \gamma \neq 0\}$ την αναλογία που μεγιστοποιεί συναρτήσεις ωφέλειας τύπου HARA (με παράμετρο αποστροφής ρίσκου γ), $f \frac{\mu - r}{\sigma^2}$ με $f \in (0, 1]$ δηλαδή να ακολουθούν μία Kelly στρατηγική (Li [57]) ή να αντιστοιχούν στις αναλογίες ενός χρηματιστηριακού δείκτη.

συναλλαγής σε μια νέα αναλογία y^1 , το κόστος συναλλαγής περιγράφεται από τη σχέση⁴

$$c(y, y^1) := K + k|y - y^1| \quad (5.2.10)$$

όπου K και k είναι δύο αυστηρά θετικές σταθερές (στον υπολογισμό τους πρέπει να ληφθεί υπόψη η αλλαγή κλίμακας). Παρατηρούμε ότι το αναλογικό μέρος του κόστους είναι ανάλογο της διαφοράς στις μετασχηματισμένες αναλογίες και όχι –όπως είναι σύνηθες στη σχετική βιβλιογραφία– ανάλογο του χρηματικού ποσού που διατίθεται σε μία συναλλαγή. Λόγω της ύπαρξης πάγιου κόστους ανά συναλλαγή αρκεί να θεωρήσουμε στρατηγικές της μορφής $\{(\tau_n, y_n)\}$, όπου τ_n ο χρόνος της n ης συναλλαγής και y_n η νέα αναλογία μετά τη n ή συναλλαγή. Τα $\{(\tau_n, y_n)\}$ πρέπει να ικανοποιούν κάποιες τεχνικές απαιτήσεις: το τ_n πρέπει να είναι stopping time (για τον ορισμό των stopping times βλέπε Karatzas και Shreve [48]), και πρέπει να ισχύει $\tau_n < \tau_{n+1}$, και $\tau_n \rightarrow \infty$ για $n \rightarrow \infty$, ενώ η στοχαστική διαδικασία y_n πρέπει να είναι F_{τ_n} -μετρήσιμη. Το πλεονέκτημα της συγκεκριμένης διατύπωσης για τα κόστη συναλλαγής είναι ότι διευκολύνει τους μετέπειτα υπολογισμούς. Ένα μειονέκτημα είναι πως για πρακτικές εφαρμογές οι σταθερές που εκφράζουν τα κόστη πρέπει να αναπροσαρμόζονται για επενδύσεις διαφορετικού μεγέθους. Οι μεταβολές των επενδυτικών αναλογιών σχετίζονται με το κόστος μη βέλτιστης επένδυσης που εκφράζεται ως συνάρτηση της απόστασης των παρατηρούμενων αναλογιών από τα επιθυμητά επίπεδα. Παρόμοια με τη σχετιζόμενη βιβλιογραφία υιοθετούμε μία τετραγωνική συνάρτηση απώλειας η οποία στη μετασχηματισμένη κλίμακα εκφράζεται ως⁵

$$g(y_t) = \lambda(e^{(y_t - \bar{y})} - 1)^2 \quad (5.2.11)$$

όπου λ μία σταθερά που σχετίζεται με τις προτιμήσεις του επενδυτή. Για τη διατύπωση του εργοδικού κριτηρίου βελτιστοποίησης θέτουμε U και L σταθερά με $-\infty < L < U < \infty$, και ορίζουμε $T(s) = T_s$ να συμβολίζει τη χρονική στιγμή που η στοχαστική διαδικασία y βρίσκεται για πρώτη φορά στο σημείο s . Συμβολίζουμε επίσης με

⁴ Ο τρόπος που ορίζουμε τα κόστη συναλλαγής είναι ουσιαστικά ίδιος με τον ορισμό των Pliska και Suzuki [77].

⁵ Αυτή η επιλογή είναι συνεπής με τα ευρήματα του Rogers [78] που παρατήρησε ότι για παρατηρούμενα επίπεδα αναλογιών σχετικά κοντά στα βέλτιστα οι επιπτώσεις στις αποδόσεις είναι μικρές. Σύμφωνα με τα παραπάνω άρθρα η απόκλιση στις αποδόσεις δεν είναι γραμμική συνάρτηση της απόστασης από τις βέλτιστες αναλογίες.

$$T^* = T_{U,L} = \min\{T(U), T(L)\} = T(U) \wedge T(L) \quad (5.2.12)$$

την πρώτη χρονική στιγμή που η διαδικασία φτάνει στο U ή το L και ορίζουμε τις παρακάτω ποσότητες για την y :

$$v_1(y) = \Pr\{T(U) < T(L) | y(0) = y\} \quad L < y < U, \quad (5.2.13)$$

είναι η πιθανότητα η διαδικασία να βρεθεί στο U πριν το L όταν ξεκινά από το y ,

$$v_2(y) = E[T^* | y(0) = y], \quad L < y < U, \quad (5.2.14)$$

είναι ο μέσος χρόνος στον οποίο η διαδικασία φτάνει στο U ή στο L όταν ξεκινά από το y και

$$v_3(y) = E\left[\int_0^{T^*} g(Y(t)) | Y(0) = y\right], \quad L < y < U. \quad (5.2.15)$$

Στη συνέχεια θεωρούμε την παρακάτω στρατηγική: “Αν η (μετασχηματισμένη) στοχαστική διαδικασία αναλογιών χαρτοφυλακίου φτάσει στο επίπεδο U πάνω από το επιθυμητό επίπεδο $\tilde{y}$, τη μειώνουμε με μία συναλλαγή στο επίπεδο u . Η παραπάνω συναλλαγή γίνεται με κόστος $K + k(U - u)$. Αν η (μετασχηματισμένη) στοχαστική διαδικασία αναλογιών χαρτοφυλακίου φτάσει στο επίπεδο L κάτω από το επιθυμητό επίπεδο $\tilde{y}$, την αυξάνουμε στο επίπεδο l με κόστος $K + k(l - L)$.” Ορίζουμε έναν επενδυτικό κύκλο να ξεκινά τη στιγμή που ολοκληρώνεται μία επέμβαση η οποία φέρνει τις αναλογίες στα l ή u από τα L ή U , και να ολοκληρώνεται στην επόμενη παρόμοια επέμβαση. Το αναμενόμενο κόστος ανά μονάδα χρόνου εκφράζεται ως το αναμενόμενο κόστος ανά επενδυτικό κύκλο διαιρεμένο με τον αναμενόμενο χρόνο ολοκλήρωσης ενός επενδυτικού κύκλου. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.2.13), (5.2.14) ο αναμενόμενος χρόνος ολοκλήρωσης ενός επενδυτικού κύκλου εκφράζεται ως

$$A(L, l, u, U) = (v_1(u) + v_1(l))v_2(u) + (2 - v_1(u) - v_1(l))v_2(l) \quad (5.2.16)$$

ενώ το αναμενόμενο κόστος ανά επενδυτικό κύκλο είναι άθροισμα του αναμενόμενου κόστους συναλλαγής και της απώλειας λόγω της διαφοράς των παρατηρούμενων αναλογιών σε σχέση με τις επιθυμητές. Το αναμενόμενο κόστος συναλλαγής εκφράζεται ως

$$B(L, l, u, U) = K + (v_1(u) + v_1(l))k(U - u) + (2 - v_1(u) - v_1(l))k(l - L)$$

(5.2.17)

Παρατηρούμε ότι το αναμενόμενο κόστος συναλλαγής ανά επενδυτικό κύκλο αποτελείται από πέντε συνιστώσες: το πάγιο κόστος συναλλαγής, δύο συνιστώσες ανάλογες της επέμβασης σε περίπτωση που η επενδυτική αναλογία φτάσει το άνω όριο σταθμισμένες με τις πιθανότητες η διαδικασία να φτάσει στο άνω όριο από τα επίπεδα u και l και δύο συνιστώσες ανάλογες της επέμβασης σε περίπτωση που η αναλογία φτάσει το κάτω όριο, σταθμισμένες αντίστοιχα. Παρόμοια με την (5.2.16) η αναμενόμενη απώλεια ανά επενδυτικό κύκλο εκφράζεται ως

$$C(L, l, u, U) = (v_1(u) + v_1(l))h_3(u) + (2 - v_1(u) - v_1(l))h_3(l). \quad (5.2.18)$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, το εργοδικό πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Πρόβλημα 5.2.1 Ο επενδυτής επιθυμεί να βρει στρατηγικές ελέγχου που ελαχιστοποιούν το αναμενόμενο κόστος ανά μονάδα χρόνου. Πιο συγκεκριμένα ο επενδυτής στοχεύει στην εύρεση ενός βέλτιστου επενδυτικού κύκλου μέσω της κατάλληλης επιλογής για την τετράδα (L, l, u, U) η οποία θα πρέπει να ελαχιστοποιεί την παράσταση

$$h(L, l, u, U) = \frac{B(L, l, u, U) + C(L, l, u, U)}{A(L, l, u, U)}. \quad (5.2.19)$$

Στο αντίστοιχο υφαιρετικό πρόβλημα ο επενδυτής στοχεύει στην ελαχιστοποίηση των καθαρών απωλειών σε έναν άπειρο χρονικό ορίζοντα. Για μία αποδεκτή στρατηγική $\{(\tau_n, y_n)\}$ και για αρχική αναλογία $b(0)=b_0$, το πρόβλημα του επενδυτή περιγράφεται από την παρακάτω συνάρτηση

$$J(y_0, \{(y_n, b_n)\}) := E_{y_0}^{\{(\tau_n, y_n)\}} \left[\lambda \int_0^\infty e^{-\beta t} g(y(t)) dt + \sum_{n=1}^\infty e^{-\beta \tau_n} c(y(\tau_{n-}), y_n) \mathbb{I}_{\{\tau_n < \infty\}} \right], \quad (5.2.20)$$

όπου $\beta > 0$ είναι ο υφαιρετικός ρυθμός, λ μία σταθερά που αντιπροσωπεύει τις προτιμήσεις του επενδυτή και το $c(y(\tau_{n-}), y_n)$ δίνεται από την (5.2.10). Το υφαιρετικό πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί όπως φαίνεται παρακάτω:

Πρόβλημα 5.2.2 Ο επενδυτής επιθυμεί να ελαχιστοποιήσει τις καθαρές απώλειες σε έναν άπειρο χρονικό ορίζοντα. Πιο συγκεκριμένα επιθυμεί να υπολογίσει τη συνάρτηση αξίας

$$J(y_0) := \inf_{\{(\tau_n, y_n)\}} J(y_0, \{(\tau_n, y_n)\}) \quad (5.2.21)$$

με το ελάχιστο να σχετίζεται με το σύνολο των αποδεκτών επενδυτικών στρατηγικών και να βρει τη βέλτιστη αποδεκτή στρατηγική.

Στην τέταρτη ενότητα δείχνουμε ότι η βέλτιστη στρατηγική για το πρόβλημα 5.2.2 σχετίζεται και πάλι με την εύρεση κατάλληλης τετράδας (L, l, u, U).

5.3 Λύση του εργοδικού προβλήματος

Για τη λύση του προβλήματος 5.2.1, χρησιμοποιούμε εργαλεία στοχαστικού λογισμού και αριθμητικές μεθόδους μη γραμμικής βελτιστοποίησης, παρόμοια με το προηγούμενο κεφάλαιο (ενότητα 4.3). Για τον υπολογισμό του αριθμητή και του παρανομαστή στην (5.2.19) σημειώνουμε ότι τα v_1, v_2 , και v_3 στις σχέσεις (5.2.13)-(5.2.15) πρέπει να ικανοποιούν τις παρακάτω συνήθεις διαφορικές εξισώσεις:

$$\kappa \frac{dv_1}{dy} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2 v_1}{dy^2} = 0 \quad \text{για} \quad L < y < U, \quad v_1(L) = 0, \quad v_1(U) = 1; \quad (5.3.1)$$

$$\kappa \frac{dv_2}{dy} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2 v_2}{dy^2} = -1 \quad \text{για} \quad L < y < U, \quad v_2(L) = v_2(U) = 0; \quad (5.3.2)$$

$$\kappa \frac{dv_3}{dy} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2 v_3}{dy^2} = -g(y) \quad \text{για} \quad L < y < U, \quad v_3(L) = v_3(U) = 0. \quad (5.3.3)$$

Για την αναπαράσταση των λύσεων στα παραπάνω προβλήματα θεωρούμε τη συνάρτηση κλίμακας της στοχαστικής διαδικασίας y η οποία ορίζεται ως

$$S(y) = \int^y s(\eta) d\eta, \quad (5.3.4)$$

όπου

$$s(y) = \exp \left\{ - \int^y [2\kappa / \sigma^2] d\xi \right\}. \quad (5.3.5)$$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$m(y) = 1 / [\sigma^2 s(y)]. \quad (5.3.6)$$

Η λύση της (5.3.1) δίνεται από τη σχέση

$$v_1(y) = \frac{S(y) - S(L)}{S(U) - S(L)} \quad \text{για } L \leq y \leq U. \quad (5.3.7)$$

Παρατηρούμε ότι η (5.3.3) είναι ειδική περίπτωση της (5.3.2) ορίζοντας κατάλληλα τη συνάρτηση g . Οι λύσεις των (5.3.2), (5.3.3) διατυπώνονται ως εξής:

$$v_2(y) = 2 \left\{ v_1(y) \int_y^U [S(U) - S(\xi)] m(\xi) d\xi + [1 - v_1(y)] \int_L^y [S(\xi) - S(L)] m(\xi) d\xi \right\} \quad (5.3.8)$$

$$v_3(y) = 2 \left\{ v_1(y) \int_y^U [S(U) - S(\xi)] m(\xi) g(\xi) d\xi + [1 - v_1(y)] \int_L^y [S(\xi) - S(L)] m(\xi) g(\xi) d\xi \right\} \quad (5.3.9)$$

Οι συναρτήσεις στις σχέσεις (5.3.4), (5.3.6) για τη στοχαστική διαφορική εξίσωση της (5.2.9) εκφράζονται ως

$$S(y) = \exp(-2\kappa y / \sigma^2) \quad (5.3.10)$$

και

$$m(y) = \exp(2\kappa y / \sigma^2) / \sigma^2 \quad (5.3.11)$$

αντίστοιχα. Ο αναμενόμενος χρόνος στον οποίο η διαδικασία φτάνει σε ένα από τα σημεία (L, U) όταν ξεκινά από το σημείο y είναι

$$\begin{aligned} v_2(y) &= 2 \frac{U(S(y) - S(L)) + y(S(L) - S(U)) + L(S(U) - S(y))}{(S(L) - S(U))\sigma^2} \\ &= \frac{2y}{\sigma^2} - \frac{2U}{\sigma^2} v_1(y) - \frac{2L}{\sigma^2} (1 - v_1(y)) \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

και οι αντίστοιχες αναμενόμενες απώλειες διατυπώνονται ως

$$v_3(y) = -v_1(y)f(U) - (1 - v_1(y))f(L) \quad (5.3.13)$$

με

$$\begin{aligned} f(x) &= \delta \left(\kappa^3 (4(x - \tilde{y}) + 2e^{2(x-\tilde{y})} - 8e^{x-\tilde{y}}) + \sigma^2 \kappa^2 (6(x - \tilde{y}) + e^{2(x-\tilde{y})} - 8e^{x-\tilde{y}} + 7) \right) \\ &\quad + \delta (\sigma^4 \kappa (2(x - \tilde{y})) + \sigma^6 (1 - S(x - \tilde{y}))) \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

και

$$\delta = \lambda (\sigma^2 \kappa (\sigma^2 + \kappa) (\sigma^2 + 2\kappa))^{-1}. \quad (5.3.15)$$

Έτσι, η παράσταση (5.2.19) μπορεί να υπολογιστεί αντικαθιστώντας τις (5.3.7)-(5.3.14) στις (5.2.16)-(5.2.18).

Για την εύρεση μιας τετράδας που ελαχιστοποιεί την (5.2.19) μπορούμε να εφαρμόσουμε έναν αλγόριθμο αριθμητικής επίλυσης προβλημάτων μη γραμμικής βελτιστοποίησης. Παραδείγματα τέτοιων αλγορίθμων είναι η μέθοδος quasi-Newton (Fletcher, [35]), η μέθοδος simplex (Lagarias κ.α., [55]) καθώς και οι γενετικοί αλγόριθμοι (Dorsey και Mayer, [31]). Εναλλακτικά, μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραγώγους της παράστασης (5.2.19) σε σχέση με τα L, l, u, U να λύσουμε το (ιδιαίτερα σύνθετο) μη γραμμικό σύστημα τεσσάρων εξισώσεων που προκύπτει με ένα αλγόριθμο τύπου Newton-Raphson και να διαλέξουμε ως πιθανές βέλτιστες τετράδες αυτές για τις οποίες η Εσσιανή του συστήματος είναι αρνητικά ορισμένη. Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε (στην πέμπτη ενότητα) αποτελέσματα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των Lagarias κ.α., [55].

Σημείωση 5.3.1. Για την αρχική (μη μετασχηματισμένη) στοχαστική διαδικασία ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$S(b) = b^{-2a} (1-b)^{-2(a+1)} \quad (5.3.16)$$

και

$$m(b) = \left(\sigma^2 (2a(\log(b) - \log(b-1))) - \log(b-1) \right)^{-1} \quad (5.3.17)$$

με

$$a = \frac{\mu - r}{\sigma^2}.$$

Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων στις σχέσεις (5.3.8), (5.3.9) με τη χρησιμοποίηση των προηγούμενων παραστάσεων γίνεται σημαντικά δυσκολότερος σε σχέση με τη μέθοδο –η οποία βασίστηκε στο μετασχηματισμό του Nagai–που παρουσιάστηκε παραπάνω.

Σημείωση 5.3.2 Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η παρακάτω απλοποιημένη εκδοχή του προβλήματος 2.1 διότι είναι πολύ πιο εύκολα εφαρμόσιμη υπολογιστικά. Στο μετασχηματισμένο πρόβλημα ο επενδυτής, εφόσον η στοχαστική διαδικασία αναλογιών χαρτοφυλακίου φτάσει στο άνω ή κάτω όριο ενός διαστήματος ελέγχου, αναπροσαρμόζει τις αναλογίες του στα (προκαθορισμένα) επιθυμητά επίπεδα. Ένα παρόμοιο πρόβλημα εξετάζεται από τον Korn [54].

Πρόβλημα 5.2.1' Ο επενδυτής επιθυμεί να βρει διαστήματα ελέγχου τα οποία ελαχιστοποιούν τις επενδυτικές απώλειες και τα κόστη συναλλαγών ανά μονάδα χρόνου. Συγκεκριμένα ο επενδυτής στοχεύει στην εύρεση ζεύγους (L, U) το οποίο να ελαχιστοποιεί την παράσταση

$$\tilde{h}(L, U) = \frac{B(L, U) + C(L, U)}{A(L, U)}. \quad (5.3.18)$$

όπου

$$A(L, U) = v_2(\tilde{y}), \quad (5.3.19)$$

$$B(L, U) = K + v_1(\tilde{y})k(U - \tilde{y}) + (1 - v_1(\tilde{y}))k(\tilde{y} - L) \quad (5.3.20)$$

$$C(L, U) = v_3(\tilde{y}). \quad (5.3.21)$$

5.4 Λύση του υφαιρετικού προβλήματος

Σε αυτή την ενότητα λύνουμε το υφαιρετικό πρόβλημα 5.2.2 με χρήση qv-ανισοτήτων. Το πρόβλημα που εξετάζεται εδώ, είναι παρόμοιο με αυτό που εξετάστηκε στο άρθρο των Pliska και Suzuki [77]. Οι πιο σημαντικές διαφορές σε σχέση με το παραπάνω άρθρο είναι οι εξής: Πρώτον το κριτήριο βελτιστοποίησης διαφέρει και δεύτερον υιοθετούμε το μετασχηματισμό που προτάθηκε από το Nagai [69] και μειώνουμε σημαντικά την υπολογιστική δυσκολία της εύρεσης των λύσεων. Παρόμοια προβλήματα στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές εξετάζονται στους Cadenillas και Zapatero [21], Buckley και Korn [17], Baccarin [4] και Plehn-Dujowich [76].

Αποδεκτές στρατηγικές

Για την ελαχιστοποίηση του συναρτησοειδούς J της (5.2.20), θεωρούμε στρατηγικές για τις οποίες το J είναι καλώς ορισμένο και πεπερασμένο. Για να ισχύει ότι η παράσταση

$$E \left[\int_0^\infty e^{-\beta t} g(y(t)) dt \right] = E \left[\int_0^\infty e^{-\beta t} e^{2(y(t) - \tilde{y})} dt \right] - 2E \left[\int_0^\infty e^{-\beta t} e^{(y(t) - \tilde{y})} dt \right] + \frac{1}{\beta} \quad (5.4.1)$$

είναι καλώς ορισμένη και πεπερασμένη πρέπει οι δύο αναμενόμενες τιμές του δεξιού μέλους να είναι πεπερασμένες. Φαίνεται εύκολα ότι η σχέση

$$E \left[\int_0^\infty e^{-\beta t} e^{2(y(t) - \tilde{y})} dt \right] < \infty \quad (5.4.2)$$

συνεπάγεται ότι

$$E \left[\int_0^\infty e^{-\beta t} e^{(y(t)-\tilde{y})} dt \right] < \infty. \quad (5.4.3)$$

Για να ισχύει

$$E \left[\sum_{n=1}^\infty e^{-\beta \tau_n} c(y(\tau_n-), y_n) I_{\{\tau_n < \infty\}} \right] < \infty \quad (5.4.4)$$

πρέπει να ισχύει

$$E \left[\sum_{n=1}^\infty e^{-\beta \tau_n} I_{\{\tau_n < \infty\}} \right] < \infty \text{ και } E \left[\sum_{n=1}^\infty e^{-\beta \tau_n} |y(\tau_n-) - y(\tau_n)| I_{\{\tau_n < \infty\}} \right] < \infty. \quad (5.4.5)$$

Για την αριστερή ανισότητα πρέπει να έχουμε

$$\forall T \in [0, \infty): \quad P \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n < T \right\} = 0. \quad (5.4.6)$$

Για να είναι αληθής η επόμενη ανισότητα στην (5.4.5), πρέπει να ισχύει

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E[e^{-\beta T} y(T+)] = 0 \quad (5.4.7)$$

το οποίο είναι αληθές για τη μετασχηματισμένη στοχαστική εξίσωση των αναλογιών χαρτοφυλακίου που εξετάζουμε εδώ.

Ορισμός 5.4.1 (Αποδεκτοί έλεγχοι): Θα λέμε ότι ένας έλεγχος είναι αποδεκτός αν ικανοποιούνται οι συνθήκες (5.4.2), (5.4.6).

Οι qv-ανισότητες

Έστω $J(\cdot)$ η συνάρτηση αξίας. Δηλαδή για κάθε $y_0 \in (-\infty, \infty)$,

$$J(y_0) := \inf_{\{(\tau_n, y_n)\} \in A(y_0)} J(y_0, \{(\tau_n, y_n)\}) \quad (5.4.8)$$

και ορίζουμε με $A(y_0)$ τις αποδεκτές στρατηγικές για τη στοχαστική διαδικασία που ξεκινά στο y_0 . Ορίζουμε ακόμα τον τελεστή M , που σχετίζεται με τη συνάρτηση $J(\cdot)$ και τη συνάρτηση κόστους $c(\cdot, \cdot)$ ως

$$MJ(y) := \inf_z \{J(z) + c(y, z)\}. \quad (5.4.9)$$

Το $MJ(y)$ παριστά την αξία της στρατηγικής κατά την οποία επιλέγεται η βέλτιστη άμεση επέμβαση στην επένδυση και η αναπροσαρμογή των αναλογιών του χαρτοφυλακίου. Μέσω της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (5.2.9) ορίζουμε το διαφορικό τελεστή L ως:

$$LJ(y) := \frac{1}{2} \sigma^2 J''(y) + \kappa J'(y) - \beta J(y). \quad (5.4.10)$$

Έστω ότι υπάρχει μία βέλτιστη στρατηγική για κάθε αρχική αναλογία χαρτοφυλακίου. Αν η διαδικασία ξεκινά από το y_0 και ακολουθεί μία βέλτιστη στρατηγική, η σχετιζόμενη συνάρτηση κόστους είναι $J(y_0)$. Από την άλλη πλευρά αν η διαδικασία ξεκινά από το y_0 , επιλέγουμε τη βέλτιστη άμεση επέμβαση και στη συνέχεια ακολουθούμε τη βέλτιστη στρατηγική η σχετιζόμενη συνάρτηση κόστους δίνεται από την $MJ(y_0)$. Εφόσον η πρώτη στρατηγική είναι βέλτιστη το κόστος που της αντιστοιχεί είναι μικρότερο από αυτό που αντιστοιχεί στη δεύτερη. Επιπλέον τα παραπάνω κόστη είναι ίσα όταν είναι βέλτιστο να παρέμβουμε. Έτσι ισχύει $J(y) \leq MJ(y)$, με ισότητα όταν είναι βέλτιστη η προσαρμογή των αναλογιών του χαρτοφυλακίου. Στην περιοχή που ο επενδυτής δεν αναπροσαρμόζει την αναλογία στο χαρτοφυλάκιό του, ισχύει $LJ(y) = -g(y)$.

Χρησιμοποιώντας κλασσικές μεθόδους επίλυσης προβλημάτων στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές (Bensoussan [8], Bensoussan και Lions [9], Korn [52, 53]) καταλήγουμε στην παρακάτω qv-ανισότητα:

$$\min\{Lv(y) + g(y), Mn(y) - v(y)\} = 0. \quad (5.4.11)$$

Αν η συνάρτηση v είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και ικανοποιεί την qv-ανισότητα καθώς και τις τεχνικές απαιτήσεις που διατυπώνονται στην αρχή της ενότητας, τότε ισχύει

$$v(y) \leq J(y, \{\tau_n, y^n\}) \quad (5.4.12)$$

για κάθε $y \in \mathfrak{R}$ και όλες τις αποδεκτές στρατηγικές $\{\tau_n, y^n\}$. Αν επιπλέον η στρατηγική που αντιστοιχεί στο v είναι αποδεκτή τότε είναι βέλτιστη και το $v(\cdot)$ ταυτίζεται με τη συνάρτηση αξίας $J(\cdot)$. Μία απόδειξη ενός παρόμοιου επιχειρήματος βρίσκεται στο παράρτημα για το πρόβλημα που εξετάζεται στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η κατασκευή της στρατηγικής που σχετίζεται με μία συνάρτηση v γίνεται ως εξής. Θέτουμε $\tau_0 = 0$ και $Y(0-) = y_0$ και ορίζουμε το n οστό χρόνο παρέμβασης ως:

$$\tau_n := \inf \{t \geq \tau_{n-1} : v(y(t-)) = Mv(y(t-))\} \quad (5.4.13)$$

και το μέγεθος παρέμβασης ως

$$y^n = \arg \min_{z \in A} \{v(z) + c(y(\tau_n -), z)\}. \quad (5.4.14)$$

Μέσω του v ορίζουμε την περιοχή στο χώρο αναλογιών μέσα στην οποία δε γίνονται παρεμβάσεις

$$C := \{y \in \mathfrak{R} : Mv(y) > v(y)\}, \quad (5.4.15)$$

Όταν $y(t) \in \partial C$, τότε παρεμβαίνουμε άμεσα αναπροσαρμόζοντας την αναλογία με βάση την (5.4.14).

Ο τελεστής M , για το πρόβλημα που εξετάζουμε γράφεται ως

$$Mv(y) = \inf_{z \in \mathfrak{R}} \{v(z) + K + k|y - z|\}, \quad (5.4.16)$$

η qv-ανισότητα (5.4.11) δίνεται από τη σχέση (5.4.17)

$$0 = \min \left\{ \frac{\sigma^2}{2} v''(y) + \kappa v'(y) - \beta v(y) + \lambda (\exp(y - \tilde{y}) - 1)^2, \inf_{z \in A} \{v(z) - v(y) + K + k|y - z|\} \right\} \quad (5.4.17)$$

και αμέσως παρακάτω εξηγούμε πως μπορεί να λυθεί. Η συνήθης διαφορική εξίσωση (5.4.17) έχει μία γενική λύση της μορφής

$$v(y) = C_1 e^{-x_1 y} + C_2 e^{-x_2 y} + g(y) \quad (5.4.18)$$

όπου g είναι μία ειδική λύση η οποία γράφεται ως

$$g(y) = \lambda \frac{A_1 + A_2 \exp(y - \tilde{y}) + A_3 \exp(2(y - \tilde{y}))}{A_4} \quad (5.4.19)$$

και ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned} A_1 &= 6\kappa(\sigma^2 - \beta) - 5\sigma^2\beta + 2(\sigma^2 + \beta^2) + 4\kappa^2 \\ A_2 &= 4\beta(2\sigma^2 + 2\kappa - \beta) \\ A_3 &= -\beta(2\kappa + \sigma^2 - 2\beta) \\ A_4 &= (2\kappa + 2\sigma^2 - \beta)\beta(\sigma^2 + 2\kappa - 2\beta) \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

Τα C_1 και C_2 είναι σταθερές που εξαρτώνται από τις συνοριακές συνθήκες ενώ τα x_1, x_2 διατυπώνονται ως εξής

$$x_{1,2} = \frac{\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2 \beta}}{\sigma^2} . \quad (5.4.21)$$

Για το εύρος των τιμών των παραμέτρων που χαρακτηρίζουν την αγορά και τις προτιμήσεις του επενδυτή υπάρχουν τέσσερις παράμετροι που ικανοποιούν $L < l < u < U$ τέτοιες ώστε η λύση των qv-ανισοτήτων να είναι της μορφής

$$v(y) = \begin{cases} -ky + \{v(y) + kl + K\} & y \in (-\infty, L] \\ v(y) & y \in (L, U) \\ ky + \{v(y) - ku + K\} & y \in [U, \infty) \end{cases} \quad (5.4.22)$$

Στο διάστημα (L, U) δεν γίνονται προσαρμογές στην επένδυση. Για $y \in (-\infty, L]$ η μετασχηματισμένη αναλογία πρέπει να βρεθεί στο $y=l$, και για $y \in [U, \infty)$ πρέπει να προσαρμόσουμε την αναλογία στο $y=u$. Για να καθορίσουμε τις τιμές των έξι παραμέτρων C_1, C_2, L, l, u και U πρέπει να λύσουμε ένα σύστημα έξι μη γραμμικών εξισώσεων οι οποίες προκύπτουν όπως φαίνεται παρακάτω. Η συνάρτηση $v(\cdot)$ πρέπει να είναι συνεχής στο $y=l$, έτσι

$$v(L) = -kL + v(l) + kl + K . \quad (5.4.23)$$

Παρόμοια παίρνουμε μία δεύτερη εξίσωση συνέχειας στο $y=u$,

$$v(U) = kU + v(u) - ku + K . \quad (5.4.24)$$

Οι παράγωγοι στα $y=L$ και U πρέπει να είναι συνεχείς, έτσι

$$v'(L) = -k \quad (5.4.25)$$

και

$$v'(U) = k . \quad (5.4.26)$$

Εφόσον η παράσταση $v(y) + K + k(y - L)$ ελαχιστοποιείται στο $y = l$, η συνθήκη της πρώτης παραγώγου δίνει

$$v'(l) = -k \quad (5.4.27)$$

και με όμοιο τρόπο προκύπτει η εξίσωση

$$v'(u) = k. \quad (5.4.28)$$

Το σύστημα των έξι εξισώσεων μπορεί να λυθεί σχετικά εύκολα από έναν αλγόριθμο αριθμητικής επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων. Στην έκτη ενότητα παρουσιάζουμε μία εφαρμογή.

5.5 Η πυκνότητα πιθανότητας της στοχαστικής διαδικασίας αναλογιών χαρτοφυλακίου

Η συνάρτηση πιθανότητας που εκφράζει το κεφάλαιο ενός επενδυτή που ακολουθεί στρατηγική σταθερών αναλογιών χαρτοφυλακίου υπό την υπόθεση των ανέξοδων συναλλαγών, είναι σχετικά εύκολο να υπολογιστεί. Πράγματι, η εξέλιξη του κεφαλαίου σε αυτή την περίπτωση περιγράφεται από μία γεωμετρική κίνηση Brown της οποίας η πυκνότητα πιθανότητας εκφράζεται μέσω της μοναδικής λύσης μίας διαφορικής εξίσωσης (Kolmogorov backward differential equation). Όταν λαμβάνονται υπόψη τα κόστη συναλλαγών η αναλογίες του χαρτοφυλακίου δεν μπορούν να είναι σταθερές: εξελίσσονται με βάση την (5.2.6) σε ένα διάστημα ελέγχου και όταν φτάσουν στα άκρα του αναπροσαρμόζονται σε κάποια βέλτιστα σημεία στο εσωτερικό του διαστήματος. Για να βρεθεί η κατανομή πιθανότητας του κεφαλαίου πρέπει πρώτα να βρεθεί η κατανομή πιθανότητας της στοχαστικής διαδικασίας αναλογιών. Στη συνέχεια, η πυκνότητα πιθανότητας του κεφαλαίου προκύπτει μέσω της σχέσης

$$f(w) = \int f(w|p)f(p)dp \quad (5.5.1)$$

όπου $f(w)$ είναι η πυκνότητα πιθανότητας του κεφαλαίου υπό την στρατηγική που λαμβάνει υπόψη τα κόστη αναπροσαρμογής, $f(w|p)$ είναι η πυκνότητα πιθανότητας του κεφαλαίου για δοθείσα σταθερή αναλογία p , και $f(p)$ είναι η πυκνότητα πιθανότητας της (ελεγχόμενης) στοχαστικής διαδικασίας αναλογιών χαρτοφυλακίου. Στα παρακάτω βήματα παρουσιάζουμε την πυκνότητα πιθανότητας για τη μετασχηματισμένη στοχαστική διαδικασία αναλογιών (5.2.9) – η πυκνότητα πιθανότητας της αρχικής διαδικασίας μπορεί να βρεθεί με εφαρμογή της σχέσης (5.2.8). Ένα σχετικό αποτέλεσμα παρουσιάζεται στο άρθρο του Plehn-Dujowich [76]. Εκεί χρησιμοποιείται μία προσέγγιση διακριτού χρόνου για τη συνεχή στοχαστική διαδικασία αναλογιών χαρτοφυλακίου. Σε αυτή την ενότητα χρησιμοποιούμε τη μέθοδο που παρουσιάζεται στους Karlin και Taylor [49] για την εύρεση της πυκνότητας πιθανότητας της (μετασχηματισμένης) στοχαστικής διαδικασίας αναλογιών η οποία ελέγχεται σε ένα διάστημα με ένα σημείο αναπροσαρμογής και στη συνέχεια διατυπώνουμε την

πυκνότητα που αφορά διαστήματα ελέγχου με δύο σημεία αναπροσαρμογής.

Σε ένα διάστημα ελέγχου με ένα σημείο αναπροσαρμογής π , υποθέτουμε ότι η διαδικασία ξεκινά από το π και επιστρέφει σε αυτό όταν φτάσει σε ένα από τα άκρα του διαστήματος ελέγχου (L, U) . Μετά την επιστροφή η διαδικασία εξελίσσεται με βάση τη σχέση (5.2.9) και αυτό συμβαίνει κάθε φορά που η διαδικασία βρίσκεται στα επίπεδα L ή U . Έτσι, η υπό έλεγχο στοχαστική διαδικασία σχετίζεται με επαναλαμβανόμενους επενδυτικούς κύκλους διάρκειας $D_1, D_2, D_3, \dots$, με D_i ανεξάρτητα και ισόνομα, με κατανομή όμοια με του χρόνου $T_{L,U} = \min\{T_L, T_U\}$, του πρώτου χρόνου εξόδου από το διάστημα (L, U) , όταν η διαδικασία ξεκινά από το π . Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$E[D_i | y(0) = \pi] = 2 \left\{ v_1(\pi) \int_{\pi}^U (S(U) - S(\xi)) m(\xi) d\xi + (1 - v_1(\pi)) \int_L^{\pi} (S(\xi) - S(L)) m(\xi) d\xi \right\} \quad (5.5.2)$$

με τα $v_1(\cdot), S(\cdot), m(\cdot)$ να δίνονται στη δεύτερη ενότητα. Έστω $f(t, y)$ η πυκνότητα της $y(t)$. Δηλαδή,

$$f(t, y) dy = \Pr\{y \leq y(t) \leq y + dy | y(0) = \pi\}. \quad (5.5.3)$$

Το ζητούμενο είναι η αποτίμηση της $a(y | L, \pi, U) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t, y)$. Για να το πετύχουμε θεωρούμε ένα διάστημα $[y_1, y_2]$ με $L < y_1 < y_2 < U$ και ορίζουμε τη διαδικασία $\{I(t), t \geq 0\}$ ως

$$I(t) = \begin{cases} 1 & \alpha \nu \quad y_1 \leq y(t) \leq y_2 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \quad (5.5.4)$$

Χωρίζουμε τώρα έναν τυπικό κύκλο χρονικής διάρκειας D_i σε δύο μέρη: στο ένα μέρος το $I(t)$ είναι ενεργό ενώ στο άλλο όχι. Ισχύει ότι,

$$\Pr\{I(t) = 1\} = E[I(t)] = \int_{y_1}^{y_2} f(t, y) dy \quad (5.5.5)$$

και από το θεώρημα που παρουσιάζεται στους Karlin και Taylor [49] (κεφάλαιο 5, ενότητα 7C) συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Pr\{I(t) = 1\} = \frac{E[T_{y_1, y_2} | y(0) = \pi]}{E[T_{L, U} | y(0) = \pi]} \quad (5.5.6)$$

Ο παρανομαστής στην (5.5.6) δίνεται από την (5.5.2) ενώ ο αριθμητής προκύπτει απλά θέτοντας y_1, y_2 στη θέση των L, U στην (5.5.2). Εφόσον η σχέση (5.5.6) ισχύει για κάθε y_1, y_2 στο διάστημα (L, U) συμπεραίνουμε ότι

$$a(y|L, \pi, U) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t, y) = \frac{2\{v_1(\pi)(S(U) - S(y)m(y)) + (1 - v_1(\pi))(S(y) - S(L)m(y))\}}{2\{v_1(\pi) \int_{\pi}^U S(U) - S(y)m(y)dy + (1 - v_1(\pi)) \int_L^{\pi} S(y) - S(L)m(y)dy\}} \quad (5.5.7)$$

Χρησιμοποιώντας την 5.5.7 η κατανομή πιθανότητας για την ελεγχόμενη διαδικασία με δύο σημεία αναπροσαρμογής l, u δίνεται από τη σχέση

$$a(y|L, l, u, L) = (v_1(u) + v_1(l))a(y|L, u, U) + (2 - v_1(u) - v_1(l))a(y|L, l, U). \quad (5.5.8)$$

5.6 Εφαρμογή

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης των προβλημάτων ελέγχου που εξετάστηκαν στην τρίτη και τέταρτη ενότητα.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τα παρακάτω δεδομένα σχετικά με τα χαρακτηριστικά της αγοράς και τις προτιμήσεις του επενδυτή

$$\kappa=0.1, \sigma=0.2, \lambda=1, \beta=0.05, \tilde{y}=0.5, k=0.05, K=0.005.$$

Για το πρόβλημα 5.2.1, η εφαρμογή της αριθμητικής μεθόδου βελτιστοποίησης Nelder-Mead simplex δίνει

$$L_I=0.4519, l_I=0.4731, u_I=0.5018, U_I=0.5446.$$

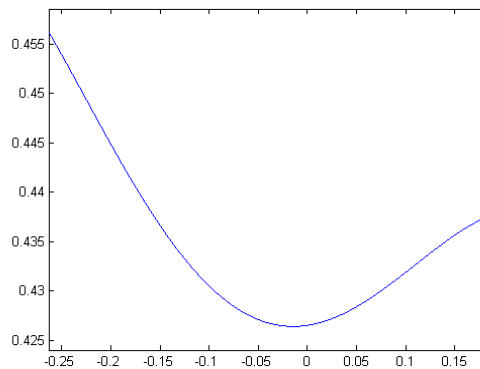
Για την απλοποιημένη εκδοχή του εργοδικού προβλήματος, δηλαδή το πρόβλημα 5.2.1', το διάστημα ελέγχου είναι

$$L_I'=0.435, U_I'=0.5433,$$

και προκύπτει μετά από μετασχηματισμό στην αρχική κλίμακα⁶. Οι λύσεις του αντίστοιχου υφαιρετικού προβλήματος είναι

$$L_2=0.4338, l_2=0.4746, u_2=0.5023, U_2=0.5456, C1=-43.7633, C2=-0.0388$$

και τα σφάλματα είναι της τάξης 10^{-8} σε όλες τις περιπτώσεις.



Γράφημα 2. Η συνάρτηση αξίας του υφαιρετικού προβλήματος

Το γράφημα 2 απεικονίζει τη συνάρτηση αξίας του υφαιρετικού προβλήματος για τις παραμέτρους του βασικού παραδείγματος. Η συνάρτηση αξίας απεικονίζεται στο μετασχηματισμένο διάστημα (TL, TU) στο οποίο η επένδυση δεν αναπροσαρμόζεται. Εκτός του διαστήματος η συνάρτηση αξίας είναι γραμμική με κλίση $-k$ στην περιοχή $(-\infty, TL]$ και με κλίση k στην περιοχή $[TU, \infty)$. Από τη σχέση (5.2.6) παρατηρούμε ότι η βέλτιστη αναλογία του Merton για λογαριθμική συνάρτηση ωφέλειας είναι σημείο ισορροπίας για τη στοχαστική διαδικασία αναλογιών χαρτοφυλακίου. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η αναλογία του Merton είναι πολύ μεγαλύτερη από τη στοχευόμενη αναλογία. Έτσι, η στοχαστική διαδικασία αναλογιών «σπρώχνει» τις αναλογίες προς τα δεξιά του διαστήματος ελέγχου και για αυτό το λόγο η συνάρτηση αξίας έχει ελάχιστο στα αριστερά της στοχευόμενης αναλογίας. Όταν ο επενδυτής επεμβαίνει από την ασθενή πλευρά του στόχου του (στο παράδειγμά μας αυτό αντιστοιχεί στην πώληση μεριδίων της επένδυσης που ενέχει κίνδυνο) είναι βέλτιστο να φέρει το χαρτοφυλάκιό του πολύ κοντύτερα στο στοχευόμενο επίπεδο σε σχέση με μία αντίστοιχη επέμβασή του από την ισχυρή πλευρά. Η διαφορά μεταξύ της αναλογίας-στόχου και της αναλογίας του Merton δημιουργεί ασυμμετρία μεταξύ του δεξιού και του αριστερού μέρους του

⁶ Για το πρόβλημα 5.2.1' οι παράγωγοι της (5.3.18) σε σχέση με τα L_1' και U_1' υπολογίστηκαν με τη χρήση του Symbolic Math Toolbox της MATLAB. Οι λύσεις στο μη γραμμικό σύστημα των παραγώγων προέκυψαν μέσω ενός αλγορίθμου trust-region-dogleg.

διαστήματος μη επέμβασης: η απόσταση του αριστερού άκρου από το στόχο είναι μεγαλύτερη από την απόσταση του δεξιού άκρου.

Ανάλυση ευαισθησίας

Για την πραγματοποίηση της ανάλυσης ευαισθησίας διαταράσσουμε ελαφρά τις τιμές των παραμέτρων και παρατηρούμε πως επηρεάζονται οι βέλτιστες στρατηγικές. Τα αποτελέσματα φαίνονται στους πίνακες 5.1-5.5. Σχετικά με τις παραμέτρους κόστους μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε τη διαίσθησή μας: ο επενδυτής επεμβαίνει πιο συχνά όταν τα κόστη βρίσκονται σε χαμηλά επίπεδα. Όσο αυξάνουν τα πάγια κόστη οι χρόνοι μεταξύ των επεμβάσεων αυξάνουν και το ίδιο συμβαίνει με το μέγεθος των επεμβάσεων. Όσο αυξάνουν τα αναλογικά κόστη οι χρόνοι μεταξύ των επεμβάσεων αυξάνουν ενώ τα μεγέθη των επεμβάσεων γίνονται μικρότερα. Με την αύξηση της μεταβλητότητας τα διαστήματα μη επέμβασης διευρύνονται ενώ με την αύξηση του κ της σχέσης (5.2.9) οι βέλτιστες επεμβάσεις από την ασθενή πλευρά του στόχου τείνουν να φέρουν τις αναλογίες σε επίπεδο χαμηλότερο του στόχου. Όσο πιο έντονη είναι η πίεση στην ασθενή πλευρά του στόχου τόσο πιο σύντομα παρεμβαίνει ο επενδυτής ενώ τα αντίθετα ισχύουν για την ισχυρή πλευρά του στόχου. Τέλος, όσο αυξάνει το λ ο επενδυτής δίνει μεγαλύτερο βάρος στις απώλειες που προκύπτουν από τις αποκλίσεις σε σχέση με τις αναλογίες-στόχους και όχι στα κόστη συναλλαγής οπότε το εύρος του διαστήματος μη επέμβασης μικραίνει.

Οι παραπάνω παρατηρήσεις ισχύουν και για το εργοδικό και για το υφαιρετικό πρόβλημα και γίνονται πιο εύκολα κατανοητές μέσω των γραφημάτων 5.4-5.9 τα οποία αφορούν το υφαιρετικό πρόβλημα. Οι πίνακες 5.1-5.5 υποδεικνύουν ότι τα διαστήματα ελέγχου του εργοδικού προβλήματος βρίσκονται στο εσωτερικό των διαστημάτων του υφαιρετικού προβλήματος. Έτσι, ο επενδυτής που υιοθετεί το εργοδικό κριτήριο επεμβαίνει νωρίτερα σε σχέση με τον επενδυτή που επιλέγει το υφαιρετικό κριτήριο με υφαιρετικό ρυθμό ίσο με 0.05. Η ανάλυση ευαισθησίας του υφαιρετικού προβλήματος σε σχέση με τον υφαιρετικό ρυθμό υποδεικνύει ότι το εύρος των διαστημάτων ελέγχου μειώνεται όπως μειώνεται ο υφαιρετικός ρυθμός (πίνακας 5.6). Από την εικόνα 5.3 παρατηρούμε πως υπάρχει γραμμική εξάρτηση μεταξύ των άκρων των διαστημάτων ελέγχου και του υφαιρετικού ρυθμού.

Πίνακας 5.1. Διαστήματα ελέγχου για το εργοδικό και το υφαιρετικό πρόβλημα για διαφορετικές τιμές του K .

K	$L1$	$I1$	$u1$	$U1$	$L2$	$I2$	$u2$	$U2$
0.003	0.4616	0.4714	0.5023	0.5389	0.4428	0.4735	0.5070	0.5395
0.004	0.4551	0.4720	0.5021	0.5413	0.4392	0.4741	0.5051	0.5420
0.005	0.4519	0.4731	0.5019	0.5446	0.4338	0.4746	0.5023	0.5456

Σημείωση. $\kappa=0.1, \sigma=0.2, \lambda=1, \beta=0.05, \tilde{y}=0.5, k=0.05$.

Πίνακας 5.2. Διαστήματα ελέγχου για το εργοδικό και το υφαιρετικό πρόβλημα για διαφορετικές τιμές του k .

k	$L1$	$I1$	$u1$	$U1$	$L2$	$I2$	$u2$	$U2$
0.03	0.4553	0.4763	0.5008	0.5438	0.4385	0.4808	0.4998	0.5444
0.04	0.4521	0.4736	0.5018	0.5442	0.4360	0.4776	0.5011	0.5451
0.05	0.4519	0.4731	0.5019	0.5446	0.4338	0.4746	0.5023	0.5456

Σημείωση. $\kappa=0.1, \sigma=0.2, \lambda=1, \beta=0.05, \tilde{y}=0.5, K=0.005$.

Πίνακας 5.3. Διαστήματα ελέγχου για το εργοδικό και το υφαιρετικό πρόβλημα για διαφορετικές τιμές του σ .

σ	$L1$	$I1$	$u1$	$U1$	$L2$	$I2$	$u2$	$U2$
0.1	0.4651	0.4767	0.4962	0.5281	0.4470	0.4746	0.4919	0.5290
0.2	0.4519	0.4731	0.5019	0.5446	0.4338	0.4746	0.5023	0.5456
0.3	0.4461	0.4681	0.5082	0.5581	0.4198	0.4708	0.5088	0.5584

Σημείωση. $\kappa=0.1, \lambda=1, \beta=0.05, \tilde{y}=0.5, k=0.05, K=0.005$.

Πίνακας 5.4. Διαστήματα ελέγχου για το εργοδικό και το υφαιρετικό πρόβλημα για διαφορετικές τιμές του κ .

κ	L1	l1	u1	U1	L2	l2	u2	U2
0.09	0.4521	0.4730	0.5020	0.5448	0.4346	0.4757	0.5031	0.5461
0.10	0.4519	0.4721	0.5019	0.5446	0.4338	0.4746	0.5023	0.5456
0.15	0.4431	0.4681	0.4924	0.5440	0.4294	0.4694	0.4981	0.5436

Σημείωση. $\sigma=0.2$, $\lambda=1$, $\beta=0.05$, $\tilde{y}=0.5$, $k=0.05$, $K=0.005$.

Πίνακας 5.5. Διαστήματα ελέγχου για το εργοδικό και το υφαιρετικό πρόβλημα για διαφορετικές τιμές του λ .

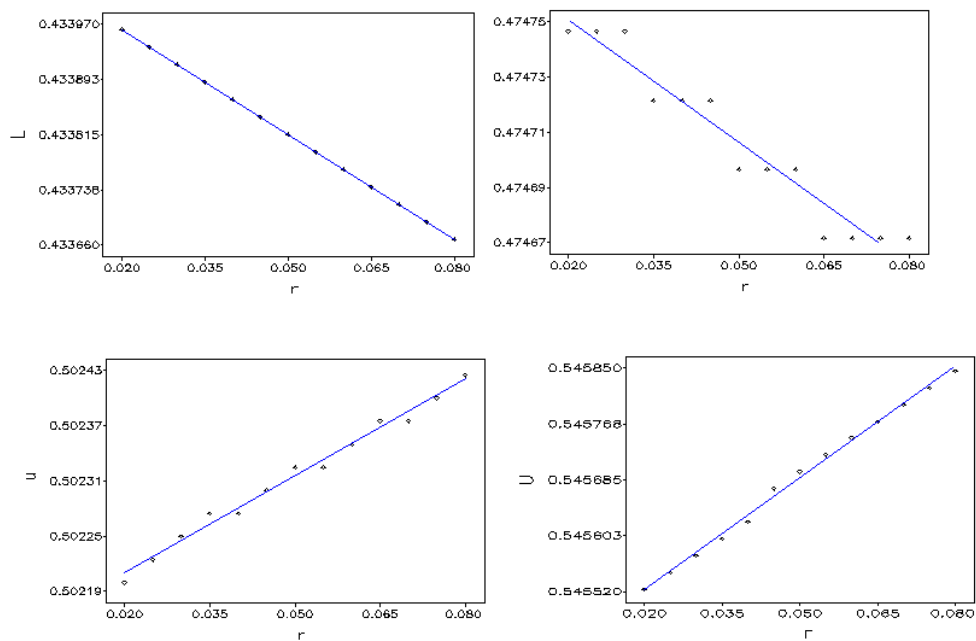
λ	L1	l1	u1	U1	L2	l2	u2	U2
0.5	0.4398	0.4609	0.5008	0.5531	0.4153	0.4634	0.4985	0.5534
1	0.4519	0.4731	0.5019	0.5446	0.4338	0.4746	0.5023	0.5456
1.5	0.4598	0.4804	0.5023	0.5416	0.4423	0.4795	0.5025	0.5416

Σημείωση. $\kappa=0.1$, $\sigma=0.2$, $\beta=0.05$, $\tilde{y}=0.5$, $k=0.05$, $K=0.005$.

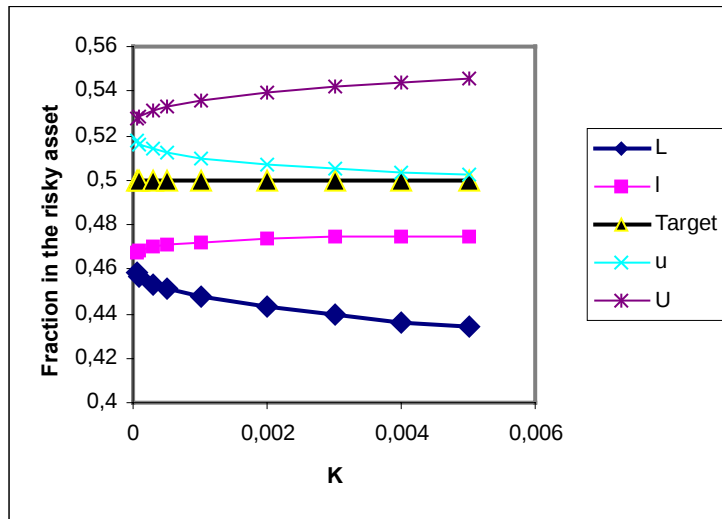
Πίνακας 5.6. Διαστήματα ελέγχου για το υφαιρετικό πρόβλημα για διαφορετικές τιμές του β .

β	L2	l2	u2	U2
0.02	0.43396	0.47475	0.50220	0.54552
0.025	0.43394	0.47475	0.50222	0.54555
0.03	0.43391	0.47475	0.50225	0.54557
0.035	0.43389	0.47472	0.50227	0.54560
0.04	0.43386	0.47472	0.50227	0.54562
0.045	0.43384	0.47472	0.50230	0.54567
0.05	0.43382	0.47470	0.50232	0.54570
0.055	0.43379	0.47470	0.50232	0.54572

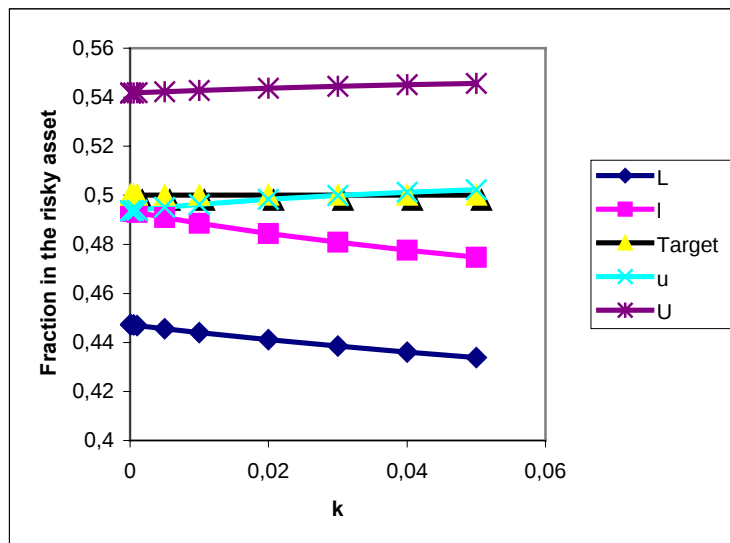
0.06	0.43377	0.47470	0.50235	0.54575
0.065	0.43374	0.47467	0.50237	0.54577
0.07	0.43372	0.47467	0.50237	0.54580
0.075	0.43369	0.47467	0.50240	0.54582
0.08	0.43367	0.47467	0.50242	0.54585



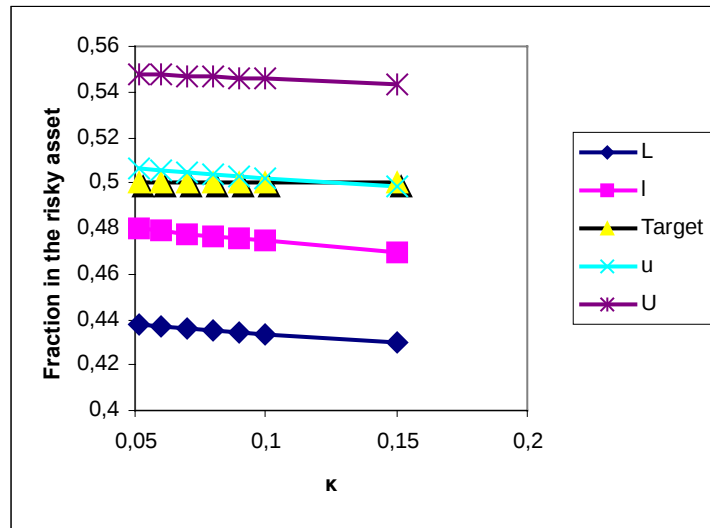
Γράφημα 5.3. Εφαρμογή στατιστικής παλινδρόμησης στη σχέση διαστήματος ελέγχου-υφαιρετικού ρυθμού.



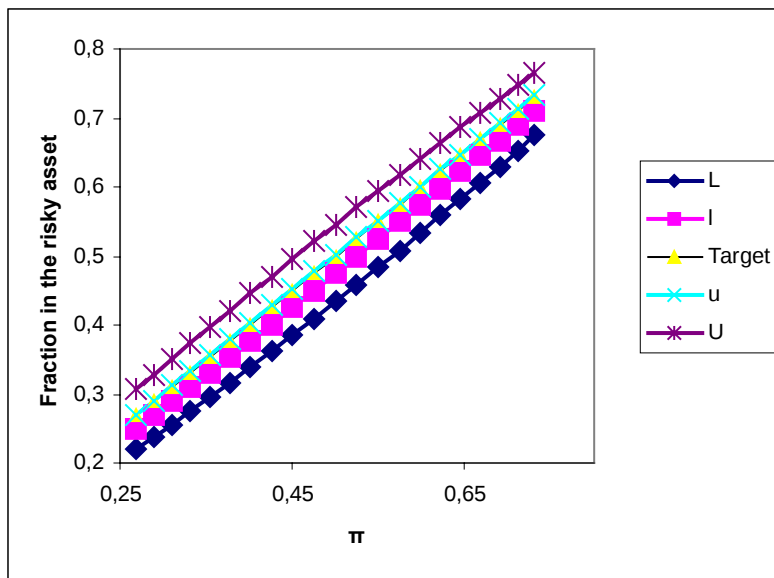
Γράφημα 5.4. Ευαισθησία του υφαιρετικού προβλήματος σε σχέση με την παράμετρο K .



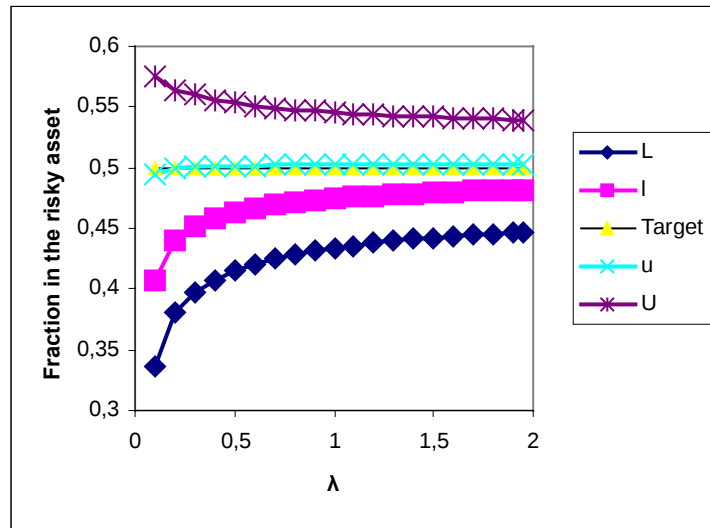
Γράφημα 5.5. Ευαισθησία του υφαιρετικού προβλήματος σε σχέση με την παράμετρο k .



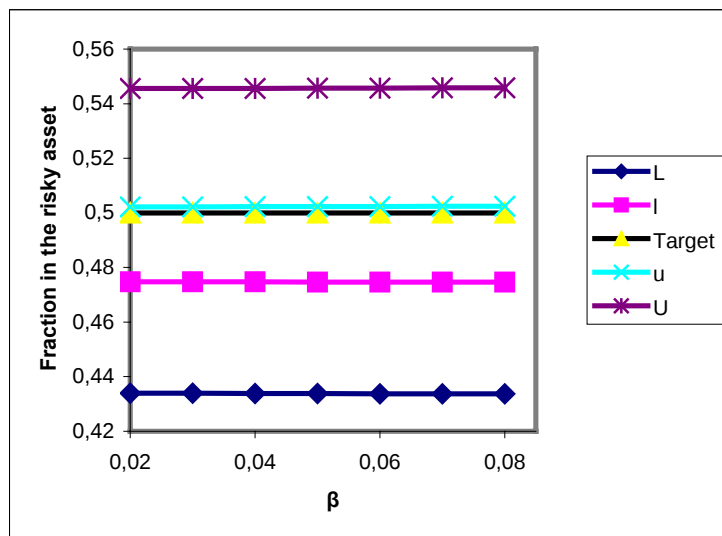
Γράφημα 5.6. Ευαισθησία του υφαιρετικού προβλήματος σε σχέση με την παράμετρο κ .



Γράφημα 5.7. Ευαισθησία του υφαιρετικού προβλήματος σε σχέση με τις στοχευόμενες αναλογίες.



Γράφημα 5.8. Ευαισθησία του υφαιρετικού προβλήματος σε σχέση με την παράμετρο λ .



Γράφημα 5.9. Ευαισθησία του υφαιρετικού προβλήματος σε σχέση με την παράμετρο β .

6 Συμπεράσματα

Ένας μεγάλος αριθμός προβλημάτων που απαντώνται κυρίως στα χρηματοοικονομικά εκφράζονται ως προβλήματα στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές. Τα συγκεκριμένα προβλήματα αφορούν τον έλεγχο τουλάχιστον μίας στοχαστικής διαδικασίας (ή και περισσότερων συσχετισμένων) η οποία περιγράφει για παράδειγμα την εξέλιξη μίας επένδυσης που ενέχει κίνδυνο, τα αποθεματικά κεφάλαια μίας εταιρείας, μία συναλλαγματική ισοτιμία κ.α. Κάθε φορά που αυτός που έχει τη δυνατότητα επέμβασης (π.χ. επενδυτής, τράπεζα) επεμβαίνει στη στοχαστική διαδικασία αλλάζοντάς της επίπεδο με σκοπό τη μεγιστοποίηση των κερδών του (ή αντίστοιχα την ελαχιστοποίηση των απωλειών του), αντιμετωπίζει πάγια κόστη αλλά και κόστη ανάλογα του μεγέθους της επέμβασής του.

Η ανάλυση τέτοιων προβλημάτων ξεκίνησε από τις αρχές της δεκαετίας του ογδόντα αλλά εντατικοποιήθηκε στα μέσα της δεκαετίας του ενενήντα. Προηγήθηκε η ενασχόληση με προβλήματα στοχαστικού ελέγχου στα οποία οι επεμβάσεις στη στοχαστική διαδικασία είναι ανέξοδες. Δύο από τις πρώτες και αναμφίβολα από τις πιο σημαντικές εργασίες τέτοιου είδους παρουσιάστηκαν στις αρχές της δεκαετίας του εβδομήντα από τους Merton [64, 65] και Black και Scholes [12] και αφορούσαν το βέλτιστο έλεγχο χαρτοφυλακίου και την αποτίμηση χρηματιστηριακών παραγώγων. Οι παραπάνω ερευνητές τιμήθηκαν για αυτές τους τις εργασίες με το βραβείο Nobel το 1997. Στις αρχές της δεκαετίας του ενενήντα πολλές ερευνητικές προσπάθειες εστιάστηκαν σε προβλήματα singular στοχαστικού ελέγχου στα οποία ο έλεγχος μίας στοχαστικής διαδικασίας συνεπάγεται κόστη ανάλογα με το μέγεθός του. Ξανά, δύο από τις πιο σημαντικές εργασίες στην περιοχή σχετίστηκαν με τον έλεγχο χαρτοφυλακίου (Davis και Norman [26]) και την αποτίμηση χρηματιστηριακών παραγώγων (Davis, Panas και Zariphoroulou [27]). Τα τελευταία δεκαπέντε χρόνια οι μέθοδοι singular στοχαστικού ελέγχου εξελίχτηκαν σημαντικά¹ και απέκτησαν μεγάλο εύρος εφαρμογών². Με δεδομένο όμως ότι οι προσαρμογές ελέγχου μιας στοχαστικής μεταβλητής στην πράξη είναι συναλλαγές με πάγιο κόστος διεκπεραίωσης, οι στρατηγικές που υποδεικνύονται μέσω singular στοχαστικού ελέγχου είναι μη βέλτιστες αφού επιτρέπουν συνεχείς αναπροσαρμογές πάνω σε ένα σύνορο ελέγχου. Υπό την παρουσία πάγιου κόστους τέτοιες στρατηγικές μπορούν να οδηγήσουν σε οικονομική καταστροφή.

¹ Το μαθηματικό υπόβαθρο που σχετίζεται με προβλήματα singular στοχαστικού ελέγχου παρουσιάζεται από τους Fleming και Soner [34].

² Εκτός του μεγάλου πλήθους εφαρμογών στα χρηματοοικονομικά τέτοιες μέθοδοι εφαρμόζονται σε πολλούς οικονομικούς κλάδους π.χ. στην περιβαλλοντική οικονομία (Lungu και Oksendal [59]).

Η μαθηματική έρευνα και το πλήθος εφαρμογών των μεθόδων στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές ακολούθησαν σε ανάπτυξη τις μεθόδους singular στοχαστικού ελέγχου. Στη βιβλιογραφία εξετάζονται κυρίως υποδείγματα τα οποία διαφέρουν στη μορφή της υπό έλεγχο στοχαστικής διαδικασίας (π.χ. γεωμετρική κίνηση Brown, λογιστική κίνηση Brown) και στη μορφή των (υφαιρετικών) κριτηρίων βελτιστοποίησης³. Ο κλασσικός τρόπος επίλυσης ενός προβλήματος στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές –δηλαδή η εύρεση της συνάρτησης αξίας και των βέλτιστων στρατηγικών– βασίζεται στη διατύπωσή του ως σύστημα qv-ανισοτήτων. Χρησιμοποιούμε την κλασσική μεθοδολογία και για τα τρία προβλήματα που εξετάζουμε στα κεφάλαια 3-5 όταν το κριτήριο βελτιστοποίησης είναι υφαιρετικό. Τα υφαιρετικά προβλήματα των κεφαλαίων 3-4 δεν έχουν ξαναπαρουσιαστεί στη βιβλιογραφία ενώ αυτό του πέμπτου κεφαλαίου έχει πολλές ομοιότητες με αυτό των Pliska και Suzuki [77]. Επιπλέον, σε σχέση με ότι αφορά την αριθμητική εκτίμηση των υποδειγμάτων και την ευαισθησία τους στις επιμέρους μεταβλητές που επηρεάζουν τις βέλτιστες στρατηγικές, δίνουμε έμφαση στην ευαισθησία σε σχέση με τον υφαιρετικό ρυθμό –κάτι που έχει εξεταστεί ελάχιστα από τη σχετιζόμενη βιβλιογραφία.

Πιο συγκεκριμένα, στο τρίτο κεφάλαιο εξετάζεται το πρόβλημα μίας εταιρείας που έχει τη δυνατότητα να αυξήσει τις ικανότητες παραγωγής της μέσω επενδύσεων κεφαλαίου. Αυτό το επενδυτικό πρόβλημα είναι εξ' όσων γνωρίζουμε το μοναδικό στο οποίο η υπό έλεγχο στοχαστική διαδικασία υπόκειται σε μονόπλευρο έλεγχο που την αποτρέπει να πάρει τιμές μικρότερες από ένα βέλτιστο κάτω όριο. Η εύρεση των αναγκαίων συνθηκών που πρέπει να ικανοποιούνται στα σημεία βέλτιστου ελέγχου δεν είναι το ίδιο προφανές στη συγκεκριμένη περίπτωση όσο στην περίπτωση προβλημάτων δίπλευρου ελέγχου⁴. Στην προκειμένη περίπτωση χρειαζόμαστε μία επιπλέον συνθήκη η οποία δεν παρέχεται απευθείας από το πρόβλημα: εδώ χρησιμοποιούμε το ότι η συνάρτηση αξίας του σχετιζόμενου singular στοχαστικού ελέγχου είναι άνω φράγμα για τη συνάρτησης αξίας του προβλήματος στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές που εξετάζουμε.

Το υφαιρετικό πρόβλημα που αναλύεται στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται επίσης για πρώτη φορά. Πρόκειται για το ανάλογο του

³ Στη βιβλιογραφία μέχρι σήμερα έχουν επιλυθεί κυρίως υποδείγματα που αφορούν μία τυχαία μεταβλητή. Ένας σημαντικός τομέας έρευνας στην περιοχή αφορά πολυδιάστατα προβλήματα η επίλυση των οποίων επαφίεται σε σύνθετες αριθμητικές μεθόδους προσέγγισης. Προσπάθειες προς αυτή την κατεύθυνση έγιναν από τους Liu [58] και Bielecki κ.α. [10, 11].

⁴ Πρακτικά το σύνολο της σχετιζόμενης βιβλιογραφίας αναφέρεται σε «δίπλευρα» προβλήματα στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές στα οποία η στοχαστική διαδικασία εξελίσσεται ελεύθερα σε ένα βέλτιστο επιλεγμένο διάστημα. Αν βρεθεί στο άνω (κάτω) σύνορο του διαστήματος αναπροσαρμόζεται σε κάποιο εσωτερικό σημείο του διαστήματος.

προβλήματος που εξετάζεται στο άρθρο των Pliska και Suzuki [77] το οποίο διατυπώνεται ως εξής: Ένας επενδυτής επιθυμεί να εφαρμόσει μία στρατηγική σταθερών αναλογιών στο χαρτοφυλάκιό του με βέλτιστο τρόπο δεδομένης της παρουσίας (πάγιων και αναλογικών) κοστών συναλλαγής. Το τελικό ζητούμενό του είναι ο καθορισμός διαστημάτων στα οποία οι αναλογίες του χαρτοφυλακίου του μεταβάλλονται ελεύθερα και σημεία στο εσωτερικό των διαστημάτων στα οποία αναπροσαρμόζονται όταν βρεθούν στα άκρα. Στο τέταρτο κεφάλαιο ο επενδυτής θα επιθυμούσε –αν δεν υπήρχαν κόστη συναλλαγής- να εφαρμόσει μία στρατηγική σταθερών χρηματικών ποσών σε διαφορετικές επενδυτικές επιλογές. Η μαθηματική διατύπωση του τελευταίου προβλήματος είναι πολύ διαφορετική σε σχέση με αυτή των Pliska και Suzuki [77], το λύνουμε όμως χρησιμοποιώντας κλασσικές μεθόδους επίλυσης βασισμένες σε qn-ανισότητες. Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο λύνουμε ουσιαστικά το πρόβλημα των Pliska και Suzuki [77] χρησιμοποιώντας έναν μετασχηματισμό που προτάθηκε πολύ πρόσφατα από τον Nagai [69] και ο οποίος διευκολύνει σημαντικά (και κάνει περισσότερο αξιόπιστους) τους υπολογισμούς που σχετίζονται με την εύρεση των βέλτιστων στρατηγικών και της συνάρτησης αξίας.

Η κύρια συνεισφορά της παρούσας εργασίας είναι τα ότι επιλύει τα προβλήματα του τέταρτου και πέμπτου κεφαλαίου με εργοδικά κριτήρια βελτιστοποίησης στα οποία το ζητούμενο είναι η μεγιστοποίηση των αναμενόμενων κερδών (αντίστοιχα η ελαχιστοποίηση των αναμενόμενων απωλειών) ανά μονάδα χρόνου. Τέτοια προβλήματα έχουν εξετασθεί σε μικρό βαθμό παρόλο που σε συγκεκριμένες εφαρμογές ταιριάζουν καλύτερα σε σχέση με τα αντίστοιχα υφαιρετικά προβλήματα στα οποία έχει κυρίως εστιάσει η έρευνα την τελευταία δεκαετία (Jack και Zervos [41]). Εδώ, εκτός της επίλυσης παρουσιάζουμε και τη σύγκριση των βέλτιστων στρατηγικών με αυτές που προκύπτουν από τα αντίστοιχα υφαιρετικά προβλήματα στα οποία το ζητούμενο είναι η μεγιστοποίηση των καθαρών κερδών (αντίστοιχα η ελαχιστοποίηση των καθαρών απωλειών) σε έναν άπειρο χρονικό ορίζοντα. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούμε συνδυάζουν βασικά αποτελέσματα στοχαστικού λογισμού με τεχνικές μη γραμμικής βελτιστοποίησης και μπορούν να προσαρμοστούν εύκολα για την επίλυση άλλων προβλημάτων (π.χ. το πρόβλημα ελέγχου μίας συναλλαγματικής ισοτιμίας).

Δυστυχώς τα προβλήματα που εξετάζουμε –είτε με εργοδικά είτε με υφαιρετικά κριτήρια βελτιστοποίησης- επιλύονται με χρήση αριθμητικών μεθόδων οπότε δεν είναι δυνατή η εύρεση αναλυτικών εκφράσεων για τις βέλτιστες στρατηγικές⁵. Σε αυτή την εργασία αντιμετωπίζουμε αυτό το ζήτημα -μερικώς- περιγράφοντας τις βέλτιστες στρατηγικές ως συναρτήσεις

⁵ Εξ' όσων γνωρίζουμε το μόνο πρόβλημα στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές στο οποίο μπορούμε να έχουμε αναλυτικές εκφράσεις για τις βέλτιστες στρατηγικές είναι το απλό παράδειγμα που εξετάζεται στο 15^ο κεφάλαιο του βιβλίου των Karlin και Taylor [49].

των παραμέτρων που χαρακτηρίζουν το πρόβλημα μέσω τεχνικών στατιστικής παλινδρόμησης και μετασχηματισμών Box-Cox. Τέλος, πρέπει να επισημανθεί ότι παρόλο που τα συνεχή μοντέλα στοχαστικού ελέγχου με διακριτές προσαρμογές έχουν απασχολήσει πολύ τη διεθνή βιβλιογραφία, έχουν γίνει προσπάθειες και για διακριτά μοντέλα τα οποία βασίζονται σε υποδείγματα χρονολογικών σειρών. Εργασίες τέτοιου είδους δημοσιεύτηκαν από τους Blum και Kalai [13], Iyengar [44], και Granger και Pesaran [37].

7. Παράρτημα

Απόδειξη του θεωρήματος 4.4.1

Η παραγωγισιμότητα της v συνεπάγεται τη συνέχειά της επομένως και το ότι είναι φραγμένη στο συμπαγές διάστημα $[b, a]$. Επιπλέον η v' είναι φραγμένη στο $(0, \infty)$ γιατί είναι συνεχής στο $[b, a]$, για κάθε $x \in [a, \infty)$: $v'(x) \in [0, \lambda_1 \gamma_1 (U - \chi)^{\gamma_1 - 1}]$ και για κάθε $x \in (0, b]$: $v'(x) \in [-\lambda_2 \gamma_2 (\chi - L)^{\gamma_2 - 1}, -\lambda_2 \gamma_2 (\chi)^{\gamma_2 - 1}]$. Έστω (T, ξ) μία αποδεκτή στρατηγική, και ορίζουμε ως $X = X^{(T, \xi)}$ την τροχιά που ορίζεται από την (T, ξ) . Παρατηρούμε ότι η συνθήκη (4.4.4), η φραξιμότητα της v στο συμπαγές διάστημα $[b, a]$ και η φραξιμότητα από μία γραμμική συνάρτηση στο διάστημα $(0, b) \cup (a, \infty)$ συνεπάγονται ότι

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E[e^{-\lambda T} v(X(T+))] = 0. \quad (A1)$$

Επιπλέον, η συνθήκη (4.4.5) και η φραξιμότητα της v' συνεπάγονται ότι

$$E \left[\int_0^\infty \{e^{-\lambda t} X(t) v'(X(t))\}^2 dt \right] < \infty. \quad (A2)$$

Για κάθε $t > 0$ και $n \in \mathbb{N}$, ισχύει

$$\begin{aligned} & e^{-\lambda(t \wedge \tau_n)} v(X_{(t \wedge \tau_n)+}) - v(X_0) \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ e^{-\lambda(t \wedge \tau_i)} v(X_{(t \wedge \tau_i)+}) - e^{-\lambda(t \wedge \tau_{i-1})} v(X_{(t \wedge \tau_{i-1})+}) \right\} + \sum_{i=1}^n I_{\{\tau_i \leq t\}} e^{-\lambda \tau_i} \{v(X_{\tau_i+}) - v(X_{\tau_i})\}. \end{aligned}$$

Εφόσον το X είναι συνεχές semimartingale στο στοχαστικό διάστημα $(\tau_{i-1}, \tau_i]$ και η v είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $(0, \infty) - \{a, b\}$, μπορούμε να εφαρμόσουμε μία κατάλληλη εκδοχή του θεωρήματος του Ito (Rogers και Williams, [79], ενότητα IV.45). Έτσι, για κάθε $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & e^{-\lambda(t \wedge \tau_i)} v(X_{(t \wedge \tau_i)+}) - e^{-\lambda(t \wedge \tau_{i-1})} v(X_{(t \wedge \tau_{i-1})+}) \\ &= \int_{(t \wedge \tau_{i-1}, t \wedge \tau_i]} e^{-\lambda s} \left\{ v'(X_s) \mu X_s + \frac{1}{2} \sigma^2 v''(X_s) X_s^2 - \lambda v(X_s) \right\} ds + \int_{(t \wedge \tau_{i-1}, t \wedge \tau_i]} e^{-\lambda s} v'(X_s) \sigma X_s dW_s \\ &= \int_{(t \wedge \tau_{i-1}, t \wedge \tau_i]} e^{-\lambda s} \mathfrak{T} v(X_s) ds + \int_{(t \wedge \tau_{i-1}, t \wedge \tau_i]} e^{-\lambda s} v'(X_s) \sigma X_s dW_s \end{aligned}$$

Από την ανισότητα (4.4.10), έχουμε

$$e^{-\lambda(t \wedge \tau_i)} \nu(X_{t \wedge \tau_i}) - e^{-\lambda(t \wedge \tau_{i-1})} \nu(X_{(t \wedge \tau_{i-1})+}) \leq \int_{(t \wedge \tau_{i-1}, t \wedge \tau_i]} e^{-\lambda s} \nu'(X_s) \sigma X_s dW_s,$$

και η παραπάνω ανισότητα είναι ισότητα για τον qv-έλεγχο που σχετίζεται με τη ν . Σύμφωνα με την (4.4.11), στην περίπτωση $\{\tau_i \leq t\}$ ισχύει

$$e^{-\lambda \tau_i} \{\nu(X_{\tau_i+}) - \nu(X_{\tau_i})\} \leq -e^{-\lambda \tau_i} \{g_1(\xi_i) I_{\{\xi_i > 0\}} + g_2(\xi_i) I_{\{\xi_i < 0\}}\}$$

και η παραπάνω ανισότητα είναι ισότητα για τον qv-έλεγχο που σχετίζεται με τη ν . Συνδυάζοντας τις παραπάνω ανισότητες και παίρνοντας αναμενόμενες τιμές έχουμε

$$\begin{aligned} & \nu(x) - E_x \left[e^{-\lambda(t \wedge \tau_n)} \nu(X_{(t \wedge \tau_n)+}) \right] \\ & \geq E_x \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left\{ I_{\{\tau_i \leq t\}} e^{-\lambda \tau_i} \{g_1(\xi_i) I_{\{\xi_i > 0\}} + g_2(\xi_i) I_{\{\xi_i < 0\}}\} - \int_{(t \wedge \tau_{i-1}, t \wedge \tau_i]} e^{-\lambda s} \nu'(X_s) \sigma X_s dW_s \right\} \right] \end{aligned}$$

με ισότητα για τον qv-έλεγχο που σχετίζεται με τη ν . Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη (4.4.3),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{\nu(x) - E_x [e^{-\lambda(t \wedge \tau_n)} \nu(X_{(t \wedge \tau_n)+})]\} = \nu(x) - E_x [e^{-\lambda t} \nu(X_{t+})]$$

και σύμφωνα με τη σχέση (A2),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_x \left[\int_0^{t \wedge \tau_n} e^{-\lambda s} \nu'(X_s) \sigma X_s dW_s \right] = 0.$$

Έτσι,

$$\nu(x) - E_x [e^{-\lambda t} \nu(X_{t+})] \geq E_x \{ I_{\{\tau_i \leq t\}} e^{-\lambda \tau_i} \{g_1(\xi_i) I_{\{\xi_i > 0\}} + g_2(\xi_i) I_{\{\xi_i < 0\}}\} \}$$

με ισότητα για τον qv-έλεγχο που σχετίζεται με τη ν . Σύμφωνα με τη σχέση (A1)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{\nu(x) - E_x [e^{-\lambda t} \nu(X_{t+})]\} = \nu(x)$$

και σύμφωνα με το θεώρημα μονότονης σύγκλισης

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_x \left\{ I_{\{\tau_i \leq t\}} e^{-\lambda \tau_i} \{g_1(\xi_i) I_{\{\xi_i > 0\}} + g_2(\xi_i) I_{\{\xi_i < 0\}}\} \right\} \\ = E_x \left\{ I_{\{\tau_i < \infty\}} e^{-\lambda \tau_i} \{g_1(\xi_i) I_{\{\xi_i > 0\}} + g_2(\xi_i) I_{\{\xi_i < 0\}}\} \right\}.$$

Οπότε ισχύει,

$$v(x) \geq E_x \left\{ I_{\{\tau_i < \infty\}} e^{-\lambda \tau_i} \{g_1(\xi_i) I_{\{\xi_i > 0\}} + g_2(\xi_i) I_{\{\xi_i < 0\}}\} \right\}$$

με ισότητα για τον qv-έλεγχο που σχετίζεται με τη v . Συνεπάγεται τελικά ότι για κάθε $(T, \xi) \in A(x)$ ισχύει:

$$v(x) \geq J(x; T, \xi),$$

με ισότητα για τον qv-έλεγχο που σχετίζεται με τη v . $\square$

Απόδειξη του θεωρήματος 4.4.2

Παρατηρούμε ότι αν η V επιλύει τις qv-ανισότητες τότε, σύμφωνα με το θεώρημα 4.4.1, η V είναι η συνάρτηση αξίας και η βέλτιστη στρατηγική δίνεται από τις (4.4.17)-(4.4.18). Πράγματι, η V είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, L) \cup (L, U) \cup (U, \infty)$ και μία φορά συνεχώς παραγωγίσιμη στα σημεία $\{L, U\}$. Επιπλέον η V είναι της μορφής (4.4.13) στο διάστημα (U, ∞) και (4.4.14) στο $(0, L)$. Ο qv-έλεγχος που σχετίζεται με τη V είναι αποδεκτός, γιατί η τροχιά X που δημιουργείται από τον qv-έλεγχο που σχετίζεται με τη V εξελίσσεται ως γεωμετρική κίνηση Brown σε διαστήματα της μορφής (τ_n, τ_{n+1}) και ικανοποιεί $P\{\forall t \in (0, \infty): X(t) \in [L, U]\} = 1$. Έτσι, ικανοποιούνται οι συνθήκες (4.4.3)-(4.4.5) και ο qv-έλεγχος που σχετίζεται με τη V είναι αποδεκτός. Έτσι, μένει μόνο να αποδειχθεί ότι η V είναι λύση των qv-ανισοτήτων.

Εκ κατασκευής της συνάρτησης h , έχουμε ότι για κάθε $L \leq x \leq U$ ισχύει:

$$\mathfrak{I}V(x) = \mathfrak{I}h(x) = 0.$$

Σύμφωνα με τη συνθήκη (4.4.32), για κάθε $x > U$:

$$\mathfrak{I}V(x) = \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 k_1^{\gamma_1} (\gamma_1 - 1) (x - \chi)^{\gamma_1 - 2} + \mu x k_1^{\gamma_1} (x - \chi)^{\gamma_1 - 1} - \lambda \left[h(\chi) - K_1 + \frac{k^{\gamma_1}}{\gamma_1} (x - \chi)^{\gamma_1} \right] < 0$$

και σύμφωνα με τη συνθήκη (4.4.33), για κάθε $x < L$

$$\mathfrak{I}V(x) = \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 k_2^{\gamma_2} (\gamma_2 - 1) (\chi - x)^{\gamma_2 - 2} - \mu x k_2^{\gamma_2} (\chi - x)^{\gamma_2 - 1} - \lambda \left[h(\chi) - K_2 - \frac{k_2^{\gamma_2}}{\gamma_2} (\chi - x)^{\gamma_2} \right] < 0$$

Έτσι η παράσταση $\mathfrak{I}V(x)$ μηδενίζεται στο διάστημα $[L, U]$ και είναι αρνητική στο $(0, L) \cup (U, \infty)$, οπότε η ανισότητα (4.4.10) ικανοποιείται.

Ισχύει επίσης ότι

$$MV(x) = \begin{cases} h(\chi) - K_1 + \frac{1}{\gamma_1} k_1^{\gamma_1} (x - \chi)^{\gamma_1} & \text{if } x \geq U \\ h(x) - \min(K_1, K_2) & \text{if } L < x < U \\ h(\chi) - K_2 - \frac{1}{\gamma_2} k_2^{\gamma_2} (\chi - x)^{\gamma_2} & \text{if } x \leq L \end{cases}$$

και παρατηρούμε πως

$$\forall \chi \in [L, U]: \quad v(\chi) - Mv(\chi) = \min(K_1, K_2) > 0.$$

Επιπλέον,

$$\forall x \in (\chi, U]: \quad v(x) - Mv(x) = h(x) - h(\chi) + K_1 - \frac{k_1^{\gamma_1}}{\gamma_1} (x - \chi)^{\gamma_1},$$

και σύμφωνα με τη σχέση (4.4.34) η συνάρτηση $v - Mv$ είναι φθίνουσα στο διάστημα (χ, U) με $v(U) - Mv(U) = 0$, οπότε η παράσταση $v - Mv$ είναι θετική στο $(\chi, U]$. Ακόμα ισχύει,

$$\forall x \in [L, \chi]: \quad v(x) - Mv(x) = h(x) - h(\chi) + K_2 + \frac{k_2^{\gamma_2}}{\gamma_2} (\chi - x)^{\gamma_2}$$

και σύμφωνα με τη σχέση (4.4.35) η συνάρτηση $v - Mv$ είναι αύξουσα στο (L, χ) με $v(L) - Mv(L) = 0$, οπότε είναι θετική στο $[L, \chi]$. Έτσι η $v - Mv$ μηδενίζεται στο διάστημα επέμβασης $(-\infty, L] \cup [U, \infty)$ και είναι θετική στο διάστημα μη επέμβασης (L, U) , οπότε ικανοποιούνται οι ανισότητες (4.4.10)-(4.4.12). Με βάση τα παραπάνω η v αποτελεί λύση για τις qv-ανισότητες και η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

Παράγωγοι της h (5.2.1)

$$\frac{d\tilde{h}}{dU} = \Lambda_1 + \Lambda_2$$

$$\frac{d\tilde{h}}{dL} = M_1 + M_2 M_3$$

$$\Lambda_1 = \frac{A_1(U) \left(A_2 + A_2' \right) + A_3 B_2 + k B_1 (\kappa(U-L) A_1(U) + v_1(\tilde{y}))}{\left(B_3 + B_3' \right) B_1}$$

$$\Lambda_2 = \frac{\frac{A_3' B_2' - A_3 B_2}{B_1} - K - k v_1(\tilde{y})(U - \tilde{y}) - k(1 - v_1(\tilde{y}))(\tilde{y} - L) \frac{B_3 A_1(U)}{B_2}}{\left(B_3 + B_3' \right)^2}$$

$$M_1 = \frac{A_1(L) \left(\frac{1 - v_1(y)}{v_1(y)} \right) \left(\frac{A_2 + A_2'}{B_1} + \frac{\kappa}{\lambda} k(U-L) \right) + (v_1(y) - 1) \left(k + \frac{\lambda A_3'}{\kappa B_1} \right)}{B_3 + B_3'}$$

$$M_2 = \frac{\left(v_1(\tilde{y}) \left(k(U - \tilde{y}) - \frac{\lambda A_2}{\kappa B_1} \right) + (v_1(\tilde{y}) - 1) \left(k(\tilde{y} - L) - \frac{\lambda A_2'}{\kappa B_1} - K \right) \right)}{\left(B_3 + B_3' \right)^2}$$

$$M_3 = A_1(L) \left(\frac{v_1(\tilde{y}) - 1}{v_1(\tilde{y})} \right) (B_3 - \kappa) \frac{B_3'}{\kappa} + \frac{2}{\sigma^2} (v_1(\tilde{y}) - 1) (1 - S(\tilde{y} - L))$$

$$A_1(x) = \frac{2\lambda v_1(\tilde{y})}{\sigma^2 (S(U) - S(L))} S(x)$$

$$A_2 = \sigma^6(1 - S(U - \tilde{y})) + \sigma^2 \kappa^2 (8e^{U-\tilde{y}} - e^{2(U-\tilde{y})} - 6(U - \tilde{y}) - 7) \\ - \kappa^3 (2e^{2(U-\tilde{y})} - 8e^{U-\tilde{y}} + 4(U - \tilde{y}) + 6) - 2\sigma^4 \kappa (U - \tilde{y})$$

$$A_2' = \sigma^6(S(L - \tilde{y}) - 1) - \sigma^2 \kappa^2 (8e^{L-\tilde{y}} - e^{2(L-\tilde{y})} - 6(L - \tilde{y}) - 7) \\ + \kappa^3 (2e^{2(L-\tilde{y})} - 8e^{L-\tilde{y}} + 4(L - \tilde{y}) + 6) + 2\sigma^4 \kappa (L - \tilde{y})$$

$$A_3 = \sigma^2 \kappa^2 (8e^{U-\tilde{y}} - 2e^{2(U-\tilde{y})} - 6) + 2\sigma^4 \kappa (S(U - \tilde{y}) - 1) \\ - \kappa^3 (4e^{2(U-\tilde{y})} - 8e^{U-\tilde{y}} + 4)$$

$$A_3' = -\sigma^2 \kappa^2 (8e^{\tilde{y}-L} - 2e^{2(\tilde{y}-L)} - 6) + 2\sigma^4 \kappa (1 - S(\tilde{y} - L)) \\ + \kappa^3 (4e^{2(\tilde{y}-L)} - 8e^{\tilde{y}-L} + 4)$$

$$B_1 = \sigma^2 (\sigma^2 + \kappa) (\sigma^2 + 2\kappa)$$

$$B_2 = \frac{\lambda v_1(\tilde{y})}{\kappa}$$

$$B_2' = \frac{\lambda(1 - v_1(\tilde{y}))}{\kappa}$$

$$B_3 = \frac{v_1(\tilde{y})}{\kappa} \left(1 - 2 \frac{\kappa(U - \tilde{y})}{\sigma^2} - S(U - \tilde{y}) \right)$$

$$B_3' = \frac{1 - v_1(\tilde{y})}{\kappa} \left(1 - 2 \frac{\kappa(\tilde{y} - L)}{\sigma^2} - S(\tilde{y} - L) \right)$$

Αναφορές

- [1] A.B. Abel, J.C. Eberly, Optimal investment with costly reversibility, *Review of Economic Studies*, 63, 581-593, 1996.
- [2] L.H.R. Alvarez, On the optimal stochastic impulse control of linear diffusions, *Turku school of Economics and Business Administration, Discussion paper series*, nr 10/2004, 2004.
- [3] L.H.R., Alvarez, J. Virtanen, A class of solvable stochastic dividend optimization problems: on the general impact of flexibility on valuation, *Turku school of Economics and Business Administration, Discussion paper series*, nr 1/2004, 2004.
- [4] S. Baccarin, Optimal impulse control for cash management with quadratic holding-penalty costs, *Decisions in Economics and Finance*, 25, 19-32, 2002.
- [5] S. Baccarin, On the existence of an optimal policy for a problem of impulse control, working paper, 2004.
- [6] P. Bank, Optimal control under a dynamic fuel constraint, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 44, 1529-1541, 2005.
- [7] E. Bayraktar, M. Egami, Optimal dividend payments under fixed cost and implementation delays for various models, preprint, 2006.
- [8] A. Bensoussan, Stochastic control by functional analysis methods, *North-Holland Amsterdam*, 1982.
- [9] A. Bensoussan, J. Lions, Impulse control and quasi-variational inequalities, *Gauthier Villars Paris*, 1984.
- [10] T.R. Bielecki, J.P. Chancelier, S.R. Pliska, A. Sulem, Risk-sensitive portfolio optimization with transaction costs, *Computational Finance*, 8, 2004.
- [11] T.R. Bielecki, S.R. Pliska, Risk sensitive asset management with transaction costs, *Finance and Stochastics*, 4, 1-33, 2000.
- [12] F. Black, M. Scholes, The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 81, 637-654, 1973.
- [13] A. Blum, A. Kalai, Universal portfolios with and without transaction costs, *Machine Learning*, 35, 193-205, 1999.
- [14] A.N. Borodin, P. Salminen, Handbook of Brownian motion-Facts and Formulae, Second edition, *Birkhauser Verlag*, 2002.
- [15] S. Browne, Optimal Investment policies for a firm with a random risk process: exponential utility and minimizing the probability of ruin, *Mathematics of Operations Research*, 20, 937-958, 1995.
- [16] S. Browne, The return from investment from proportional portfolio strategies, *Advances in Applied Probability*, 30, 216-238, 1998.

- [17] I. Buckley, R. Korn, Optimal cash management and transaction costs, *International journal of Theoretical and Applied Finance*, 1, 315-330, 1998.
- [18] A. Cadenillas, Stochastic impulse control for a consumption problem with fixed and proportional transaction costs, *Proceedings of the 38th conference on decision & control, Phoenix Arizona*, 1999.
- [19] A. Cadenillas, F. Zapatero, Optimal central bank intervention in the foreign exchange market, *Journal of Economic Theory*, 87, 218-242, 1999.
- [20] A. Cadenillas, F. Zapatero, Classical and impulse stochastic control of the exchange rate using interest rates and reserves, *Mathematical Finance*, 10, 141-156, 2000.
- [21] A. Cadenillas, S. Sarkar, F. Zapatero, Optimal dividend policy with a mean-reverting cash reservoir, preprint, 2006.
- [22] A. Cadenillas, T. Choulli, M. Taksar, L. Zhang, Classical and impulse stochastic control for the optimization of the dividend and risk policies of an insurance firm, *Mathematical Finance*, 16, 181-202, 2006.
- [23] M.B. Chiarolla, U.G. Haussmann, Explicit solution of a stochastic, irreversible investment problem and its moving threshold, *Mathematics of Operations Research*, 30, 91-108, 2005.
- [24] J.C. Cox, S.A. Ross, The valuation of options for alternative stochastic processes, *Journal of Financial Economics*, 3, 145-166, 1976.
- [25] M.H.A. Davis, M.A.H. Dempster, S.P. Sethi, D. Vermes, Optimal capacity expansion under uncertainty, *Advances in Applied Probability*, 19, 156-176, 1987.
- [26] M.H.A. Davis, A.R. Norman, Portfolio selection with transaction costs, *Mathematics of Operations Research*, 15, 676-713, 1990.
- [27] M.H.A. Davis, V.G. Panas, T. Zariphopoulou, European option pricing with transaction costs, *SIAM journal on control and optimization*, 31, 470-493, 1993.
- [28] S. Dayanik, M. Egami, Solving impulse control problems via optimal stopping for one-dimensional diffusions, preprint, 2004.
- [29] A. Dixit, R. Pindick, Investment under uncertainty, *Princeton University Press*, 1994.
- [30] A. Dixit, A simplified treatment of the theory of optimal regulation of Brownian motion, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 15, 657-673, 1991.
- [31] R. E. Dorsey, W.J. Mayer, Genetic Algorithms for Estimation Problems with multiple optima, nondifferentiability, and other irregular features, *Journal of Business & Economic Statistics*, 13, 53-66, 1995.
- [32] B. Dumas, Super contact and related optimality conditions, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 15, 675-685, 1991.

- [33] W.H. Fleming, R.W. Rishel, Deterministic and stochastic optimal control, *Springer-Verlag*, 1975.
- [34] W.H. Fleming, H.M. Soner, Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions (2nd edition), *Springer-Verlag*, 2006.
- [35] R. Fletcher, Practical Methods of Optimization Vol. 1, Unconstrained Optimization, *Wiley*, 1980.
- [36] S.M. Focardi, F.J. Fabozzi, The Mathematics of Financial Modeling and Investment Management, *Wiley*, 2004.
- [37] C.W.J. Granger, M.H. Pesaran, Economic and statistical measures of forecast accuracy, *Journal of Forecasting*, 19, 537-560, 2000.
- [38] R. Grinold, R. Kahn, Active portfolio management: Quantitative theory and applications, *Phoebus Press*, 1995.
- [39] X. Guo, H. Pham, Optimal partially reversible investment with entry decisions and general production function, *Stochastic processes and their applications*, 115, 705-736, 2005.
- [40] J.M. Harrison, T.M. Sellke, A.J. Taylor, Impulse control of Brownian motion, *Mathematics of Operations Research*, 8, 454-466, 1983.
- [41] A. Jack, M. Zervos, Impulse control of one-dimensional ito diffusions with an expected and a pathwise ergodic criterion, *Applied Mathematics and Optimization*, 54, 71-93, 2006.
- [42] M. Jeanblanc-Pique, Impulse control method and exchange rate, *Mathematical Finance*, 3, 161-177, 1993.
- [43] M. Jeanblanc-Pique, A.N. Shiryaev, Optimization of the flow of dividends, *Russian Mathematical Surveys*, 50, 257-277, 1995.
- [44] G. Iyengar, Universal investment in markets with transaction costs, *Mathematical Finance*, 15, 359-371, 2005.
- [45] Y. Kamarianakis, A. Xepapadeas, Controlling the risky fraction process with an ergodic criteriom, submitted to *Quantitative Finance*, 2006.
- [46] Y. Kamarianakis, A. Xepapadeas, Stochastic impulse control with ergodic and discounted optimization criteria, submitted to *the Journal of Economic Dynamics and Control*, 2006.
- [47] Y. Kamarianakis, A. Xepapadeas, An irreversible investment model with a stochastic production capacity and fixed plus proportional transaction costs, submitted to *Economia*, 2006.
- [48] I. Karatzas, S. E. Shreve, Brownian motion and stochastic calculus, *Springer*, 1991.
- [49] S. Karlin, H.M. Taylor, A second course in Stochastic Processes, *Academic Press*, 1981.
- [50] T.O. Kobila, A class of solvable stochastic investment problems involving singular controls, *Stochastics and Stochastics Reports*, 43, 29-63, 1993.
- [51] R. Korn, Optimal Impulse Control when the Control Consequences are random, *Mathematics of Operations Research*, 22, 639-667, 1997.

- [52] R. Korn, Portfolio optimization with strictly positive transaction costs and impulse control, *Finance and Stochastics*, 2, 85-114, 1998.
- [53] R. Korn, Some applications of impulse control in mathematical finance, *Mathematical Methods of Operations Research*, 50, 493-518, 1999.
- [54] R. Korn, Realism and practicality of transaction cost approaches in continuous-time portfolio optimization: the scope of the Morton-Pliska approach, *Mathematical Methods of Operations Research*, 60, 165-174, 2004.
- [55] J.C. Lagarias, J.A. Reeds, M.H. Wright, P.E. Wright, Convergence properties of the Nelder-Mead Simplex method in low dimensions, *SIAM journal of optimization*, 9, 112-147, 1998.
- [56] H.E. Leland, Optimal portfolio implementation with transaction costs and capital gains taxes, working paper University of California-Berkeley, 2000.
- [57] Y. Li, Growth-security investment strategy for long and short runs, *Management Science*, 39, 915-924, 1993.
- [58] H. Liu, Optimal consumption and investment with transaction costs and multiple risky assets, *Journal of Finance*, 59, 2004.
- [59] E. Lungu, B. Oksendal, Optimal harvesting from a population in a stochastic crowded environment, *Mathematical Biosciences*, 145, 47-75, 1997.
- [60] J.L. Menaldi, M. Robin, On some cheap control problems for diffusion processes, *Transactions of the American Mathematical Society*, 278, 771-802, 1983.
- [61] J.L. Menaldi, E. Rofman, On stochastic control problems with impulse control vanishing, In: A.V. Fiacco, K.O. Kortanek, (Eds.), *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 215, 218-294, 1983.
- [62] D. Melas, M. Zervos, Optimal control of Ito diffusions with an ergodic criterion and external parameters, preprint, 2006
- [63] A. Merhi, M. Zervos, Irreversible Capacity Expansion with Proportional and Fixed Costs, preprint, 2005.
- [64] R.C. Merton, Optimum consumption and portfolio rules in a continuous time model, *Journal of Economic Theory*, 3, 373-413, 1971.
- [65] R.C. Merton, Theory of Rational Option Pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 141-183, 1973.
- [66] R.C. Merton, Continuous-Time Finance, *Oxford U.K.: Blackwell*, 1990.
- [67] A.J. Morton, S. Pliska, Optimal portfolio management with fixed transaction costs, *Mathematical Finance*, 5, 337-356, 1995.

- [68] G.Mundaca, B. Oksendal, Optimal stochastic intervention control with application to the exchange rate, *Journal of Mathematical Economics*, 29, 225-243, 1998.
- [69] H. Nagai, Risky fraction processes and portfolio optimization with transaction costs, working paper, 2005.
- [70] A. Oksendal, Irreversible investment problems, *Finance and Stochastics*, 4, 223-250, 2000.
- [71] B. Oksendal, Stochastic control problems where small intervention costs have big effects, *Applied Mathematics & Optimization*, 40, 355-375, 1999.
- [72] B. Oksendal, A. Sulem, Optimal consumption and portfolio with fixed and proportional transaction costs, *SIAM journal on Control and Optimization*, 40, 1765-1790, 2002.
- [73] B. Perthame, Continuous and impulsive control of diffusion processes in $\mathbb{R}^n$, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, 8, 1227-1239, 1984a.
- [74] B. Perthame, Quasi-variational inequalities and Hamilton-Jacobi-Bellman equations in a bounded region, *Communications in Partial Differential Equations*, 9, 561-595, 1984b.
- [75] H. Pham, Explicit solution to an irreversible investment model with a stochastic production capacity, In: Kabanov., Y., Liptser, R., (Eds.), *From stochastic analysis to mathematical finance, Festschrift for Albert Shiryaev*, Springer, 2005.
- [76] J.M. Plehn-Dujowich, The optimality of a control band policy, *Review of Economic Dynamics* 8, 877-901, 2005.
- [77] S.R. Pliska, K. Suzuki, Optimal tracking for asset allocation with fixed and proportional transaction costs, *Quantitative Finance*, 4, 233-243, 2004.
- [78] L.C.G. Rogers, The relaxed investor and parameter uncertainty, *Finance and Stochastics*, 5, 131-154, 2001.
- [79] L.C.G. Rogers, D. Williams, Diffusions, Markov Processes, and Martingales Vol. 2., *Wiley New York*, 1987.
- [80] H. Scarf, The optimality of (S, s) policies in the dynamic inventory problem, In: K.J. Arrow, S. Karlin, P. Suppes (eds.), *Mathematical methods in the social sciences*, *Stanford University Press*, 1960.
- [81] A. Sulem, A solvable one-dimensional model of a diffusion inventory system, *Mathematics of Operations Research*, 11, 125-133, 1986.
- [82] T. Tamoura, Maximizing the growth rate of a portfolio with fixed and proportional transaction costs, *Applied Mathematics & Optimization*, 54, 95-116, 2004.
- [83] H. Wang, Capacity expansion with exponential jump diffusion processes, *Stochastics and Stochastics Reports*, 75, 259-274, 2003.

- [84] V.I. Zakamouline, European option pricing and hedging with both fixed and proportional transaction costs, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 30, 1-25, 2006.